

Interpolare cu funcții spline

Curbele pot fi reprezentate în plan prin:

- **ecuații explicite:** De exemplu $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ și $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$

reprezintă un cerc cu centrul în origine, de rază r

- **ecuații implicite:** $x^2 + y^2 = r^2$
- **ecuații parametrice:** $x(t) = r \cos t$ și $y(t) = r \sin t$

Reprezentarea prin ecuații explicite, de forma $y = f(x)$ și nici ecuațiile implicite nu asigură reprezentarea curbelor având mai multe valori într-un punct (nu sunt funcții).

$f(p) = f(x, y) = 0$ nu tratează corect tangentele verticale la curbă.

Forma parametrică:

$$p(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

- este mult mai flexibilă
- permite reprezentarea de curbe care nu sunt funcții (au mai multe valori într-un punct)
- este independentă de coordonate

Specificarea unei curbe se face prin:

- **puncte de control** – mulțime de puncte care influențează forma curbei
- **noduri** – puncte de control care se află pe curbă

Un spline este o curbă parametrică definită prin puncte de control.

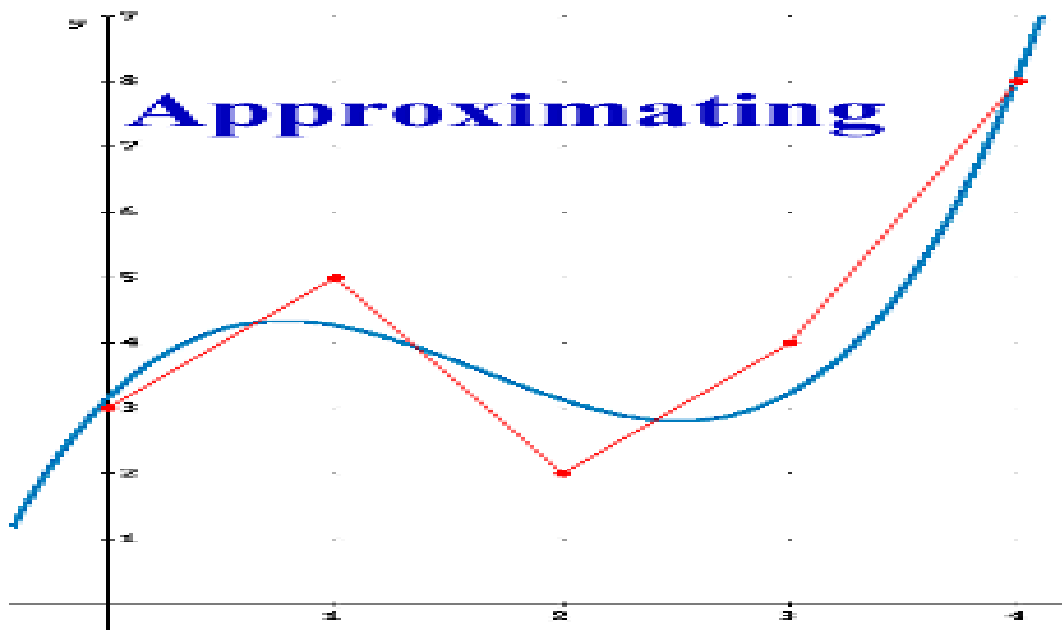
- Un *spline* este o funcție $S: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definită local pe mai multe intervale prin $P_i: [t_i, t_{i+1}) \rightarrow \mathbb{R}$, cu $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} = b$

$$S(t) = P_0(t), \quad t_0 \leq t < t_1$$

$$S(t) = P_1(t), \quad t_1 \leq t < t_2$$

$$S(t) = P_{k-2}(t), \quad t_{k-2} \leq t < t_{k-1}$$

- Funcțiile $p_i(t)$ sunt de regulă polinoame de grad 3
- Nodurile t_i se aleg de obicei echidistante, definind un spline *uniform*
- Dacă în vecinătatea nodurilor t_i , $S \in C^{r_i}$, atunci spline-ul are *netezimea* C^{r_i} . (adică spline-urile P_{i-1} și P_i au aceleași derivate de ordin 0 până la r_i)
- Splineul de grad 0 este *splineul treaptă*, cel de ordin 1 este *spline liniar* și coincide cu poligonul punctelor de control.
- Un spline utilizat – *spline-ul cubic natural* are gradul 3 și continuitatea C^2 . În plus, la capete: $S''(a) = S''(b) = 0$.
- Splineurile de grad n utilizate în analiza numerică au continuitatea $S(t) \in C^{n-1}[a, b]$
- Splineurile utilizate în Adobe și PostScript au continuitatea $S(t) \in C^1[a, b]$
- Pentru asigurarea continuității C^2 , funcțiile spline trebuie să aibă cel puțin gradul 3
- Funcțiile spline pot fi:
 - *funcții spline de interpolare* – care trec prin toate punctele de control
 - *funcții spline de aproximare* – care nu trec prin toate punctele de control



Funcții spline de interpolare în clasă C^1 .

Vom alege polinoame de interpolare de grad mic, valabile pe subintervale

$$\mathbf{x}_0 < \mathbf{x}_1 < \dots < \mathbf{x}_n$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0), \mathbf{f}(\mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$$

și vom considera funcții de interpolare liniare, locale pe subintervalele

$$[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1], [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2], \dots, [\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n]$$

$$\mathbf{p}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_i \mathbf{x} + \mathbf{b}_i, \quad i = 0 : n-1$$

în care cei $2n$ parametri se determină din *condițiile de interpolare*:

$$\mathbf{p}_i(\mathbf{x}_i) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i), \quad i = 0 : n-1$$

$$\mathbf{p}_{n-1}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$$

și a *condițiilor de racordare (continuitate în punctele interioare)*:

$$\mathbf{p}_i(\mathbf{x}_{i+1}) = \mathbf{p}_{i+1}(\mathbf{x}_{i+1}), \quad i = 0 : n-2$$

Interpolarea liniară prezintă dezavantajul discontinuității derivatelor în punctele interioare.

$$\mathbf{a}_i = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)}{\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i}, \quad i = 0 : n-1$$

$$\mathbf{b}_i = \frac{\mathbf{x}_{i+1} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1})}{\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i}$$

Prin alegerea unor funcții de interpolare de gradul 3 se poate realiza o interpolare Hermite, care presupune și fixarea valorii derivatelor pe suportul interpolării:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0), \mathbf{f}'(\mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)$$

O funcție spline cubică se exprimă sub forma:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

sau *parametric*

$$S_i(t) = a_i + b_i h_i t + c_i h_i^2 t^2 + d_i h_i^3 t^3, \quad t \in [0, 1]$$

în care s-a notat $h_i = x_{i+1} - x_i$ și s-a efectuat schimbarea de variabilă:

$$t = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x - x_i}{h_i}$$

Baza *Bernstein* : $(1 - t)^3, 3t(1 - t)^2, 3t^2(1 - t), t^3$ cu $t \in [0, 1]$

reduce volumul de calcule necesar determinării coeficienților.

$$s_i(t) = a'_i(1 - t)^3 + 3b'_i t(1 - t)^2 + 3c'_i t^2(1 - t) + d'_i t^3$$

Avem $2n+2$ condiții de interpolare de tip Hermite:

$$s_i(x_i) = f(x_i)$$

$$s'_i(x_i) = f'(x_i), \quad i = 0 : n$$

și $2n-2$ condiții de racordare (continuitate și derivabilitate în punctele interioare):

$$s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1})$$

$$s'_i(x_{i+1}) = s'_{i+1}(x_{i+1}), \quad i = 0 : n-2$$

$$a'_i = f(x_i) \quad b'_i = f(x_i) + \frac{h_i}{3} f'(x_i)$$

$$d'_i = f(x_{i+1}) \quad c'_i = f(x_{i+1}) - \frac{h_i}{3} f'(x_{i+1})$$

$$s_i(t) = y_i(1 - t)^3 + (3y_i + h_i y'_i)t(1 - t)^2 + (3y_{i+1} - h_i y'_{i+1})t^2(1 - t) + y_{i+1}t^3$$

Eroarea interpolării pentru funcțiile spline în clasă C^1 este:

$$E(x) = \frac{(x - x_0)^2 \dots (x - x_n)^2}{(2n + 2)!} \cdot f^{(2n+2)}(\xi)$$

$$E(x) = \frac{(x - x_0)^2 (x - x_1)^2}{4!} f^{(4)}(\xi) = \frac{t^2(1 - t)^2 h^4 f^{(4)}(\xi)}{24}$$

$$E(x) \leq \frac{(1/2)^2 (1/2)^2 h^4 f^{(4)}(\xi)}{24} = \frac{M_4 h^4}{384}$$

Funcții spline de interpolare în clasă C^2 .

Considerăm numai $n+1$ condiții de interpolare de tip Lagrange:

$$s_i(x_i) = f(x_i), \quad i = 0 : n-1$$

$$s_{n-1}(x_n) = f(x_n)$$

rezultă:

$$a_i = f(x_i), \quad i = 0 : n-1$$

$$a_{n-1} + b_{n-1} h_{n-1} + c_{n-1} h_{n-1}^2 + d_{n-1} h_{n-1}^3 = f(x_n) \equiv a_n$$

$$a_i = f(x_i), \quad i = 0 : n$$

Disponem de mai multe grade de libertate pentru condițiile de racordare: continuitatea valorilor și a derivatelor de ordinul 1 și 2 în punctele interioare

$$s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1})$$

$$a_{i+1} = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 \quad i = 0 : n - 2$$

$$a_n \equiv a_{n-1} + b_{n-1} h_{n-1} + c_{n-1} h_{n-1}^2 + d_{n-1} h_{n-1}^3$$

$$s'_i(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2$$

$$s'_i(x_{i+1}) = s'_{i+1}(x_{i+1}) \quad i = 0 : n - 2$$

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2$$

pe care o prelungim cu $i=0:n-1$, introducând notația

$$b_n \equiv b_{n-1} + 2c_{n-1} h_{n-1} + 3d_{n-1} h_{n-1}^2$$

$$s''_i(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_i)$$

$$s''_i(x_{i+1}) = s''_{i+1}(x_{i+1})$$

$$c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i$$

$$c_n \equiv c_{n-1} + 3d_{n-1} h_{n-1}$$

s-au obținut astfel $4n-2$ relații, mai putem impune 2 condiții suplimentare

$$s''_0(x_0) = 0, \quad s''_{n-1}(x_n) = 0$$

care definesc *funcțiile spline naturale*

$$s'_0(x_0) = f'(x_0), \quad s'_{n-1}(x_n) = f'(x_n)$$

pentru *funcții spline tensionate*.

$$a_i = f(x_i), \quad i = 0 : n - 1$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \quad i = 0 : n - 1$$

$$b_i = \frac{a_i - a_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{c_{i-1} + 2c_i}{3} h_{i-1}, \quad i = 1 : n - 1$$

$$h_{i-1} \cdot c_{i-1} + 2 \cdot (h_{i-1} + h_i) \cdot c_i + h_i \cdot c_{i+1} = \frac{3 \cdot (a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{3 \cdot (a_i - a_{i-1})}{h_{i-1}}$$

$$s''_0(x_0) = 2c_0 + 6d_0(x_0 - x_0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0$$

$$s''_{n-1}(x_n) = 2c_{n-1} + 6d_{n-1}h_{n-1} \equiv 2c_n = 0 \Rightarrow c_n = 0$$

$$\begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \ddots & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & 0 & 0 & h_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \dots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \dots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3(a_2 - a_1)}{h_1} - \frac{3(a_1 - a_0)}{h_0} & 0 \\ \frac{3(a_n - a_{n-1})}{h_{n-1}} - \frac{3(a_{n-1} - a_{n-2})}{h_{n-2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$s'_0(x_0) = b_0 + 2c_0(x_0 - x_0) + 3d_0(x_0 - x_0)^2 = b_0 = f'(x_0)$$

$$b_0 = \frac{a_1 - a_0}{h_0} - \frac{h_0}{3} (2c_0 + c_1) = f'(x_0)$$

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = 3f'(x_0) - \frac{a_1 - a_0}{h_0}$$

$$s'_{n-1}(x_n) = b_{n-1} + 2c_{n-1}h_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1}^2 = b_n = f'(x_n)$$

$$b_n = f'(x_n) = b_{n-1} + 2c_{n-1}h_{n-1} + (c_n - c_{n-1})h_{n-1} = \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{3} (2c_{n-1} + c_n) + h_{n-1}c_{n-1} + h_{n-1}c_n,$$

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(x_n) - \frac{3}{h_{n-1}} (a_n - a_{n-1})$$

$$\begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \ddots & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \dots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \dots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3(a_1 - a_0)}{h_0} - 3f'(x_0) \\ \frac{3(a_2 - a_1)}{h_1} - \frac{3(a_1 - a_0)}{h_0} \\ \dots \\ \frac{3(a_n - a_{n-1})}{h_{n-1}} - \frac{3(a_{n-1} - a_{n-2})}{h_{n-2}} \\ 3f'(x_n) - \frac{3(a_n - a_{n-1})}{h_{n-1}} \end{bmatrix}$$

Funcții spline de aproximare Hermite

Spline-ul Hermite este un spline cubic, deci dispune de 4 grade de libertate:

- $p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$
- $p'(t) = 3at^2 + 2bt + c$

Vom impune ca restricții valorile la capete și valorile derivatelor la capete



Hermite Specification

Definim vectorul de control:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_1' \\ p_2' \end{bmatrix}$$

$$p(0) = d$$

$$p(1) = a + b + c + d$$

$$p'(0) = c$$

$$p'(1) = 3a + 2b$$

$\Rightarrow$

$$a = 2p_1 - 2p_2 + p_1' + p_2'$$

$$b = -3p_1 + 3p_2 - 2p_1' - p_2'$$

$$c = p_1'$$

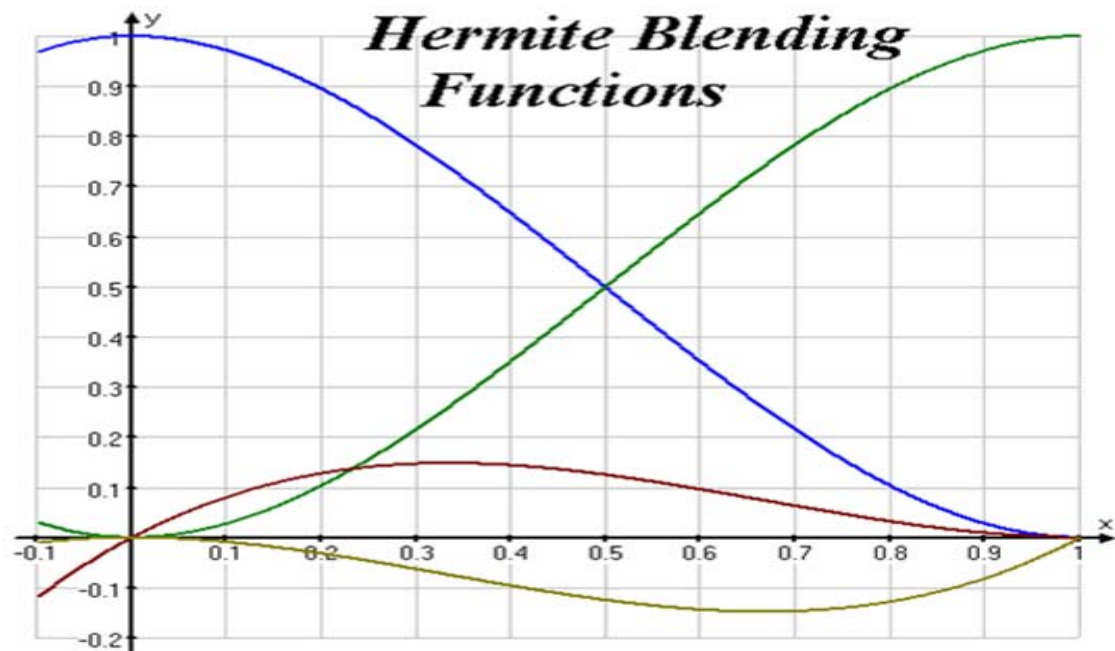
$$d = p_1$$

$$p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$p(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_1' \\ p_2' \end{bmatrix} = t^T \cdot M_H \cdot q$$

$$p(t) = \begin{bmatrix} 2t^3 - 3t^2 + 1 & -2t^3 + 3t^2 & t^3 - 2t^2 + t & t^3 - t^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_1' \\ p_2' \end{bmatrix}$$

În graficul funcției componentele vectorului de control apar ponderate cu ***funcțiile de îmbinare*** (blending functions):



Spline cardinale.

Sunt spline Hermite, care nu folosesc derivate, care sunt înlocuite prin diferențele:

$$T_i = a(P_{i+1} - P_{i-1})$$

Spline Catmull-Rom.

Sunt spline cardinale cu $a=0.5$ $T_i=0.5(P_{i+1}-P_{i-1})$

Spline-ul Catmull-Rom are proprietățile:

- trece prin toate punctele de control (spline de interpolare)
- este C^1 continuu

$$q(t) = \frac{1}{2} \cdot [1 \quad t \quad t^2 \quad t^3] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

$$q(t) = \frac{1}{2} \cdot [-t^3 + 2t^2 - t \quad 3t^3 - 5t^2 + 2 \quad -3t^3 + 4t^2 + t \quad t^3 - t^2] \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

Spline Kochanek – Bartels

Sunt spline Hermite, folosite de 3d-Studio Max cu control mai bun asupra animației.

Calculul tangentelor se face cu relațiile:

$$TS_i = \frac{(1-t)(1-c)(1+b)}{2} (p_i - p_{i-1}) + \frac{(1-t)(1+c)(1-b)}{2} (p_{i+1} - p_i)$$

$$TD_i = \frac{(1-t)(1+c)(1+b)}{2} (p_i - p_{i-1}) + \frac{(1-t)(1-c)(1-b)}{2} (p_{i+1} - p_i)$$

Funcții spline Bézier

Dându-se două puncte P_0 și P_1 , orice punct de pe segmentul P_0P_1 reprezintă o *curbă Bézier liniară*, definită prin:

$$B_1(P_0, P_1, t) = (1-t)P_0 + tP_1, \quad t \in [0, 1]$$

Curba Bézier pătratică, determinată de punctele P_0 și P_2 ca puncte de interpolare și P_1 ca punct de aproximare se poate calcula, pentru fiecare t prin 3 interpolări liniare:

$$P_a = B_1(P_0, P_1, t)$$

$$P_b = B_1(P_1, P_2, t)$$

$$B_2(P_0, P_1, P_2, t) = B_1(P_a, P_b, t) = B_1(B_1(P_0, P_1, t), B_1(P_1, P_2, t), t)$$

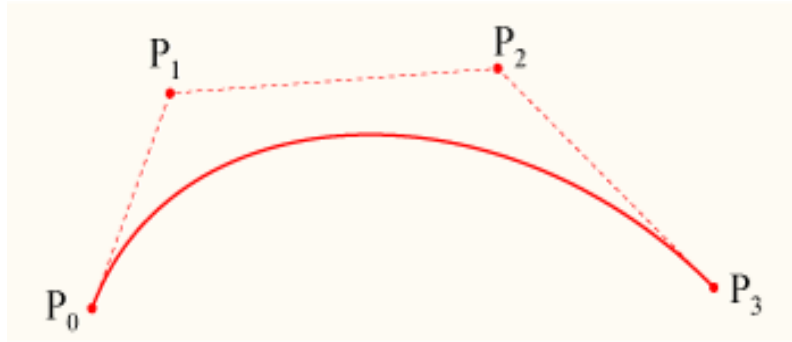
$$B_2(P_0, P_1, P_2, t) = B_1[(1-t)P_0 + tP_1, (1-t)P_1 + tP_2]$$

$$B_2(P_0, P_1, P_2, t) = (1-t)[(1-t)P_0 + tP_1] + t[(1-t)P_1 + tP_2]$$

$$B_2(P_0, P_1, P_2, t) = (1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2, \quad t \in [0, 1]$$

Fonturile TrueType folosesc curbe Bézier pătratice.

Patru puncte în plan sau spațiu definesc o *curbă Bézier cubică*. Aceasta pleacă din P_0 , ajunge în P_3 și nu trece prin P_1 și P_2 . Acestea dau informații numai asupra direcției



Curba Bézier cubică are forma parametrică:

$$B(t) = P_0(1-t)^3 + 3P_1t(1-t)^2 + 3P_2t^2(1-t) + P_3t^3, \quad t \in [0, 1]$$

Postscript și GIMP folosesc pentru reprezentarea literelor curbe Bézier cubice.

Polinoame Bernstein.

Sunt generate din dezvoltarea polinomului $[t + (1-t)]^n$

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0 : n$$

Proprietățile polinoamelor Bernstein:

- Nenegativitatea $B_i^n > 0, \quad t \in (0,1]$
- Simetria $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$
- Maxim unic $t=i/n$ în $[0,1]$
- Formula de recurență $B_i^n(t) = (1-t) \cdot B_i^{n-1}(t) + t \cdot B_{i-1}^{n-1}(t), \quad i = 0 : n$

- Derivare

$$\frac{d}{dt} B_i^n(t) = \begin{cases} -nB_i^{n-1} & i = 0 \\ n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) & 0 < i < n \\ nB_{n-1}^{n-1}(t) & i = n \end{cases}$$

Curba Bézier de grad n este definită pentru $n+1$ puncte: $P_0, P_1, \dots, P_n$ prin:

$$B(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} P_i (1-t)^{n-i} t^i = P_0(1-t)^n + \binom{n}{1} P_1(1-t)^{n-1}t + \dots + P_n t^n, \quad t \in [0,1]$$

$$B(t) = \sum_{i=0}^n P_i b_{i,n}(t), \quad t \in [0,1]$$

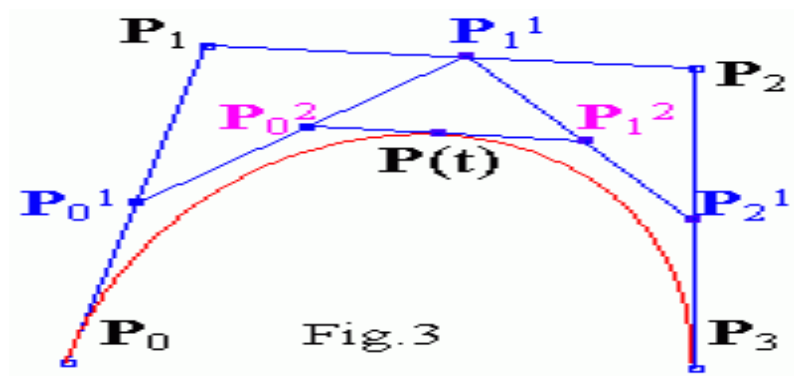
$$b_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0 : n$$

se numesc *polinoame Bernstein*.

- Punctele P_i se numesc *puncte de control* ale curbei Bézier, iar poligonul $P_0P_1 \dots P_n$ se numește *poligon Bézier*. *Poligonul Bézier conține în interiorul lui curba Bézier*

Proprietăți ale curbelor Bézier:

- *proprietatea punctelor de capăt* – curba începe în P_0 și se termină în P_n
- curba Bézier este lineară numai dacă punctele de control sunt coliniare
- curba Bézier este tangentă segmentelor P_0P_1 și $P_{n-1}P_n$.
- o curbă Bézier este conținută complet în înfășurătoarea convexă a punctelor de control.
- O curbă Bézier poate fi separată în alte două curbe Bézier.
- Transformările afine (translația și rotația) aplicată punctelor de control are același efect cu aplicarea transformării afine asupra curbei



Curbele Bézier modelează curbele netede în grafica pe calculator. Cele mai folosite sunt curbele Bézier pătratice și cubice. Acestea sunt folosite ca splineuri Bézier pentru a aproxima alte funcții

Algoritmul De Casteljau.

Determină un punct de pe curba Bézier. Un mod direct îl constituie aplicarea relației pentru t și punctele de control date

$$B(t) = \sum_{i=0}^n \beta_i b_{i,n}(t)$$

unde $\mathbf{b}_{in}$ este baza polinoamelor Bernstein.

Metoda nu este stabilă numeric, datorită erorilor în evaluarea polinoamelor Bernstein.

Pentru calcul se utilizează relația de recurență

$$\beta_i^{(0)} = \beta_i, \quad i = 0 : n$$

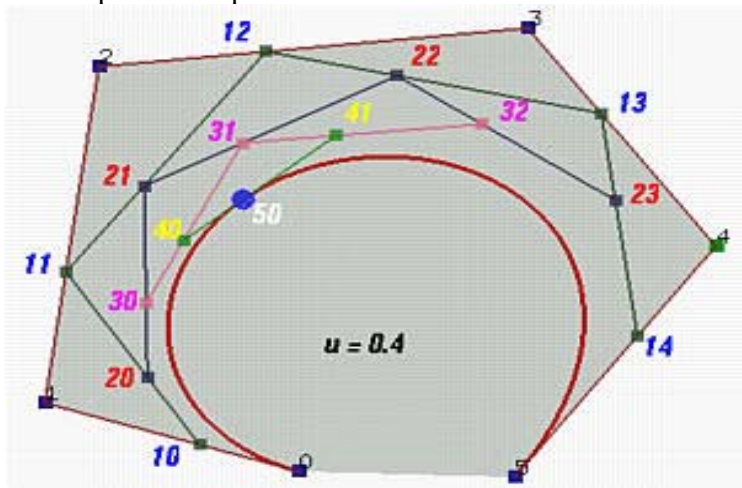
$$\beta_i^{(j)} = \beta_i^{(j-1)}(1 - t_0) + \beta_{i+1}^{(j-1)}t_0, \quad i = 0 : n - j, \quad j = 1 : n$$

cu $\mathbf{B}(t_0) = \beta_0^{(n)}$

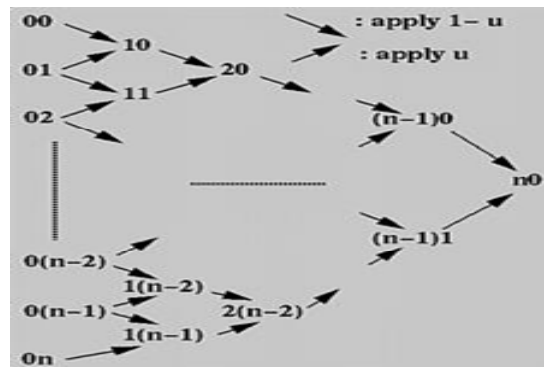
Fie $\mathbf{P}_i^0, i=0:n$ poligonul punctelor de control $\mathbf{P}_i^0$ și $\mathbf{P}_{i+1}^0$ două puncte succesive și $\mathbf{P}_i^1$ un punct care împarte segmentul $\mathbf{P}_i^0\mathbf{P}_{i+1}^0$ în raportul $t/(1-t)$:

$$\mathbf{P}_i^1 = \mathbf{P}_i^0 + t(\mathbf{P}_{i+1}^0 - \mathbf{P}_i^0) = (1-t)\mathbf{P}_i^0 + t\mathbf{P}_{i+1}^0$$

- Se formează în acest fel poligonul $\mathbf{P}_i^1, i=0:n-1$.
- Se aplică algoritmul noului poligon același algoritm obținându-se poligonul $\mathbf{P}_i^2, i=0:n-2$. Repetând procesul de n ori se obține un singur punct $\mathbf{P}^n$. Acest punct este punctul cerut



Algoritmul De Casteljau.



Calculul poate fi exprimat recursiv prin relația:

$$\mathbf{P}_i^j = (1-t)\mathbf{P}_{i-1}^j + t\mathbf{P}_{i-1}^{j+1}, \quad i=1 : n, \quad j=0:n-i$$

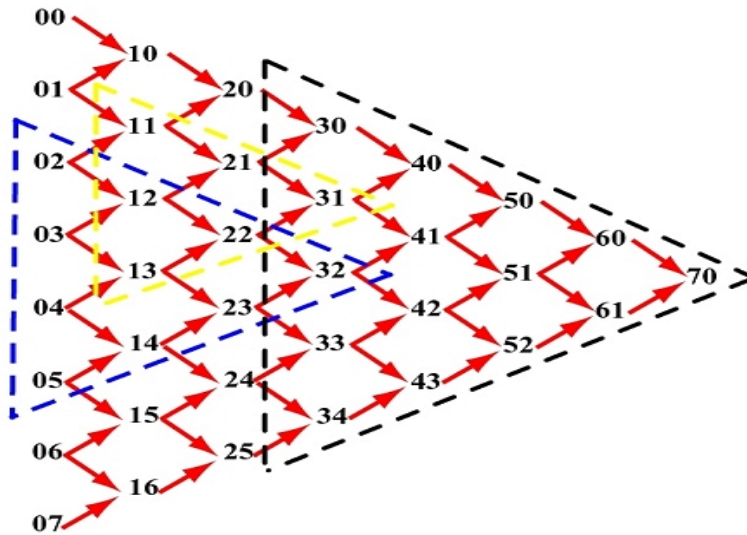
și implementat ineficient prin:

```

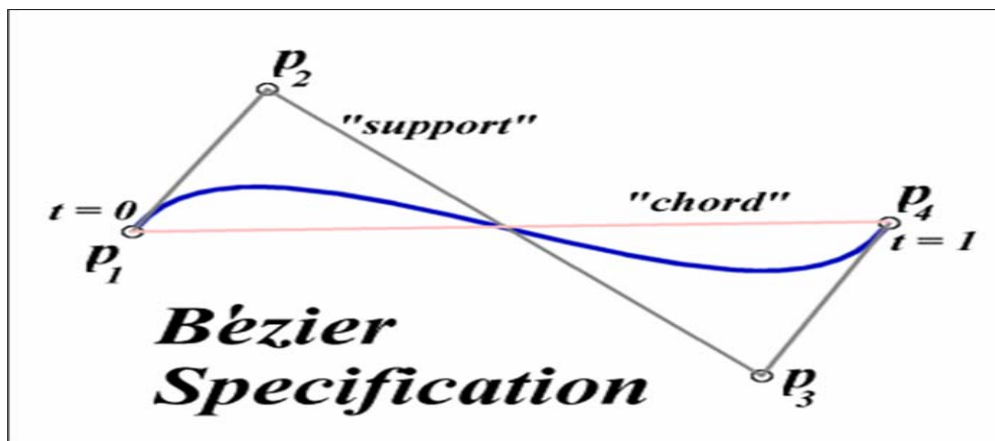
function b=Castrec(P, u, i, j)
    if i==1
        b=P(1,j);
    else
        b=(1-u)*Castrec(P,u,i-1,j)+u*Castrec(P,u,i-1,j+1);

```

Ineficiența provine din apelurile recursive repetate. Acestea pot fi evitate urmărind schema de calcul pentru puncte de control succesive.



Spline-urile Bézier folosesc în locul derivatelor două puncte suplimentare de control. Punctele de control suplimentare determină derivatele, și asigură un control mai eficient decât cel prin derivate



Derivatele la capete (în P_1 și P_4) se exprimă folosind celelalte două puncte de control prin:

$$P_1' = 3(P_2 - P_1)$$

$$P_4' = 3(P_4 - P_3)$$

Putem face trecerea între vectorii de control Hermite și Bézier:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \nabla p_1 \\ \nabla p_2 \end{bmatrix}}_{G_{Hermite}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}}_{G_{Bezier}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}}_{M_{Hermite}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}}_{G_{Bezier}}$$

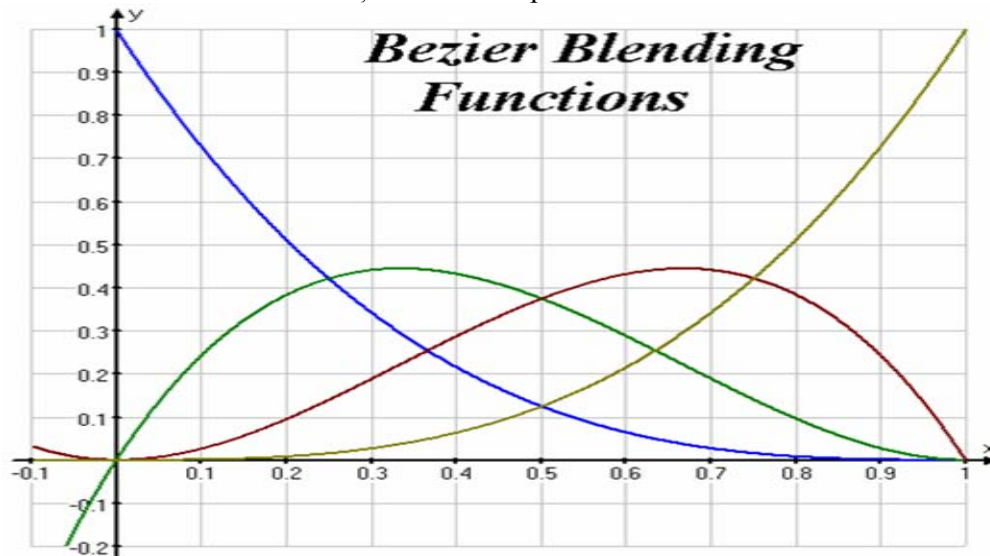
$$\underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}}_{M_{Bezier}} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}}_{G_{Bezier}}$$

Funcțiile de îmbinare pentru spline-ul Bézier sunt polinoamele Bernstein B^3_i , $i=0:3$

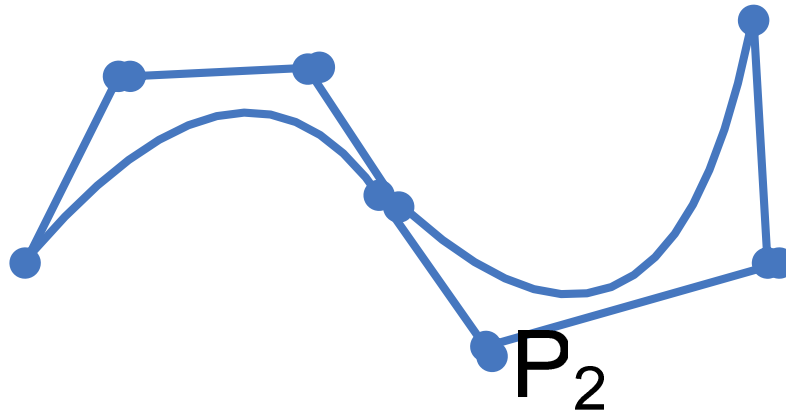
$$p(t) = \begin{bmatrix} (1-t)^3 \\ 3t(1-t)^2 \\ 3t^2(1-t) \\ t^3 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

Polinoamele Bernstein au proprietățile:

- sunt pozitive în $[0,1]$
- au suma egală cu 1
- curba este o combinație convexă a punctelor de control



Splineurile Bezier se obțin prin joncțiunea de curbe Bezier.



Continuitate C^0 : $P_4 = Q_1$
 Continuitate C^1 : $P'_4 = Q'_1$ $P_4 - P_3 = Q_2 - Q_1$
 Continuitate C^2 : $P''_4 = Q''_1$ $P_2 - 2P_3 + P_4 = Q_1 - 2Q_2 + Q_3$
 Din cele 3 condiții rezultă:
 $Q_1 = P_4$
 $Q_2 = 2P_4 - P_3$
 $Q_3 = P_2 - 4P_3 + 4P_4$

Cu alte cuvinte pentru cel de-al doilea spline avem un singur grad de libertate.

Spline B

Curbele Bezier nu asigură un control local efectiv, în sensul că modificarea punctelor de control afectează în mod global forma curbei

Calculul curbelor Bezier este inefficient.

Splineurile B asigură un control local mai bun decât splineurile Bezier.

Splineurile B sunt de forma:

$$p(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix}}_T \cdot \frac{1}{6} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{B_{\text{splineB}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}}_{G_{\text{splineB}}}$$

$$p(t) = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} (t-1)^3 & 3-6t+4t^3 & -3+3t+3t^2+t^3 & t^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

Proprietățile splineurilor B:

1. control local mai bun – fiecare punct de control are efect local
2. continuitate – curba de grad n este C^{n-1} continuă
3. aproximare – un spline B nu trece prin nici un punct de control
4. curba este conținută în poligonul $P_1P_2 \dots P_{n+1}$

Se pot defini funcții spline B de ordin superior:

$$N_{ik}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} \cdot N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} \cdot N_{i+1,k-1}(t)$$

$$N_{i1}(t) = \begin{cases} 1 & t_i < t < t_{i+1} \\ 0 & \text{in caz contrar} \end{cases}$$

NURBS (Spline B Raționale NeUniforme).

Se definesc prin relațiile:

$$R_k(t) = \frac{w_k N_{k,d+1}(t)}{\sum_{j=0}^n w_j N_{j,d+1}(t)}$$

În care:

$N_{k,d}$ – este baza funcțiilor B spline

w_k – sunt ponderi (Au parametric de formă)

Proprietăți:

1. interpolează la capete
2. asigură reprezentări exacte curbelor canonice (cerc, elipsă)
3. sunt invariante la proiecția perspectivă