

Interpolare.

Fie o funcție reală $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, cunoscută numai într-un număr limitat de puncte numite *noduri*, (ansamblul acestora constituind *suportul interpolării*): $x_1, x_2, \dots, x_n$ prin valorile $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$.

Vom aproxima comportarea funcției în afara acestor puncte printr-un *polinom generalizat de interpolare*, de forma:

$$P_n(x) = a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x) + \dots + a_n u_n(x)$$

în care funcțiile liniar independente

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$$

sunt cunoscute și constituie *baza interpolării*.

Aceasta poate fi formată din funcții simple: polinoame, funcții trigonometrice, exponențiale, etc.

Determinarea polinomului generalizat de interpolare (i.e. a coeficienților) se face, impunând ca pe suportul interpolării polinomul de interpolare să coincidă cu funcția f .

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 1 : n \text{ condiții de interpolare}$$

Condițiile de interpolare conduc la sistemul de ecuații liniare

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot u_k(x_i) = f(x_i), \quad i = 1 : n$$

$$U \cdot a = f$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \quad \underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \underline{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix}$$

$$\text{cu } u_{ij} = u_j(x_i), \quad f_i = f(x_i)$$

$$P(x) = \sum_{k=1}^n a_k u_k(x) = u^T(x) a = u^T(x) \cdot U^{-1} f = l^T(x) f$$

$$l^T(x) = u^T(x) \cdot U^{-1} = [u_1(x) \ u_2(x) \ \dots \ u_n(x)] \cdot U^{-1} = [l_1(x) \ l_2(x) \ \dots \ l_n(x)]$$

$$P(x) = \sum_{k=1}^n l_k(x) \cdot f(x_k)$$

$$\begin{aligned} l_k(x_i) &= 0, & i &\neq k, \\ l_k(x_k) &= 1. \end{aligned}$$

Pentru baza polinomială $u_1(x)=1, u_2(x)=x, \dots, u_n(x)=x^{n-1}$

Funcțiile $l_k(x)$ sunt polinoame de grad $n-1$, cu rădăcinile $x_i, i=1:n, i \neq k$:

$$l_k(\mathbf{x}) = C_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \dots (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k-1}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}) \dots (\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)$$

$$C_k = \frac{1}{(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_1) \dots (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1})(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k+1}) \dots (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_n)}$$

$$l_k(\mathbf{x}) = \prod_{i=1, i \neq k}^n \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i}$$

Polinomul de interpolare poartă în acest caz numele de *polinom de interpolare Lagrange* și are forma

$$P_n(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n f(\mathbf{x}_k) \cdot \prod_{i=1, i \neq k}^n \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i}$$

Sistemul determinat de condițiile de interpolare este

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot \mathbf{x}_i^{k-1} = f(\mathbf{x}_i)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_1^2 & \dots & \mathbf{x}_1^{n-1} \\ 1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_2^2 & \dots & \mathbf{x}_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \mathbf{x}_n & \mathbf{x}_n^2 & \dots & \mathbf{x}_n^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Acesta are determinant *Vandermonde*, care este nenul dacă punctele sunt distincte, caz în care sistemul este compatibil determinat, cu soluție unică, ceea ce implică un polinom de interpolare unic.

```
function a=coefLagr(x,y)
% calcul coeficienti polinom Lagrange
x = x(:);
n = length(x); % grad polinom n-1
V = ones(n,n);
for j=2:n
    V(:,j) = V(:,j-1).* x;
end;
a = V \ y;
```

Alte forme ale polinomului de interpolare Lagrange

$$\pi(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

$$\pi'(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^n (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \pi'(\mathbf{x}_k) = \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^n (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)$$

$$l_k(\mathbf{x}) = \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^n \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i} = \frac{1}{\mathbf{x} - \mathbf{x}_k} \cdot \frac{\prod_{i=1}^n (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{\prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^n (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)}$$

$$l_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{x} - \mathbf{x}_k} \cdot \frac{\pi(\mathbf{x})}{\pi'(\mathbf{x}_k)}$$

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n f(\mathbf{x}_k) l_k(\mathbf{x}) = \pi(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^n \frac{f(\mathbf{x}_k)}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \pi'(\mathbf{x}_k)}$$

```

function b = Lagrange(a, x, y)
% valoare polinom Lagrange in a
%Intrări:
% a = abscisa în care se cere polinomul
% x = abscisele celor n+1 puncte
% y = ordonatele celor n+1 puncte
%Ieșiri:valoare polinom interpolare în a
n = length(x); % numar puncte
b = 0;
for i = 1 : n
    prod = y(i);
    for j = 1 : n
        if i~=j
            prod=prod*(a-x(j))/(x(i)-x(j));
        end;
    end;
    b = b + produs;
end

```

Complexitatea metodei este $O(n^2)$.

$$V = \begin{bmatrix} 1 & a - x_1 & \cdots & a - x_1 \\ a - x_2 & 1 & \cdots & a - x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a - x_n & a - x_n & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ x_1 - x_2 & 1 & \cdots & x_n - x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 - x_n & x_2 - x_n & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Se observă că multiplicatorii Lagrange reprezintă raportul produselor pe coloane ale celor două matrice:

$$L = [l_1 \ l_2 \ \cdots \ l_n] = \text{prod}(V) \cdot / \text{prod}(U)$$

Valoarea polinomului Lagrange într-un punct de abscisă a

$$b = \sum_{i=1}^n l_i \cdot y_i = \text{prod}(V) \cdot / \text{prod}(U) * y$$

$$U = \begin{bmatrix} x_1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ x_2 & x_2 & \cdots & x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & x_n & \cdots & x_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} + I_n$$

$$U = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{bmatrix} + I_n$$

$$U = \text{diag}(x) * \text{ones}(n) - \text{ones}(n) * \text{diag}(x) + \text{eye}(n)$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 & a & \cdots & a \\ a & 0 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_1 \\ x_2 & 0 & \cdots & x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & x_n & \cdots & 0 \end{bmatrix} + I_n$$

$$V = a * \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + I_n$$

$$V = (a - \text{diag}(x)) * \sim\text{eye}(n) + \text{eye}(n)$$

```
function b = Lagrange(a, x, y)
% valoare polinom Lagrange in a
n = length(x);
V=(a-diag(x))*~eye(n)+eye(n);
U=diag(x)*ones(n)-ones(n)*diag(x)+eye(n);
b=prod(V)./prod(U)*y;

function a = coefLagr(x, y)
% Intrări:
% x = tabloul absciselor celor n puncte
% y = tabloul ordonatelor celor n puncte
% Ieșiri:
% a = coeficienti polinom Lagrange
a=zeros(n,1);
z=zeros(n,1);
% calcul coeficienți c din (x-x(1))...(x-x(n))
c=poly(x);
for i = 1 : n
% calcul coeficienți b ai împărțirii
% polinomului prin x-x(i)
[b,r]=deconv(c,[1 -x(i)]);
% calcul p=(x(i)-x(1))...(x(i)-x(i-1))(x(i)-x(i+1))(x(i)-x(n))
z=x(i)-x;
z(i)=1;
p=prod(z);
a(1:n)=a(1:n)+y(i)*b(1:n)/p;
end
```

Polinomul de interpolare de grad p poate fi calculat prin recurență, folosind polinoame de interpolare de grad mai mic.

Dacă se notează $\sigma = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ și P_σ - polinomul de interpolare ce trece prin punctele $(x_{i1}, y_{i1}), (x_{i2}, y_{i2}), \dots, (x_{ip}, y_{ip})$

atunci polinomul de interpolare definit pe ansamblul extins de puncte $\sigma + j + k = \sigma \cup \{j, k\}$

$$P_{\sigma+j+k}(x) = \frac{(x - x_j)P_{\sigma+k}(x) - (x - x_k)P_{\sigma+j}(x)}{x_k - x_j}$$

Metoda Neville are forma:

$$Q_{ij}(x) = \frac{(x - x_{i-j}) \cdot Q_{i,j-1}(x) - (x - x_i) \cdot Q_{i-1,j-1}(x)}{x_i - x_{i-j}}$$

în care s-a notat $Q_{ij} = P_{i-j, \dots, i}$ polinomul de interpolare prin punctele (x_{i-j}, y_{i-j}) ,
 $\dots, (x_i, y_i)$

Se pornește cu polinoamele de interpolare de grad 0, reprezentate prin $y_1, y_2, \dots, y_n$,
 formându-se polinoamele de interpolare de grad 1, 2, ..., ș.a.m.d. conform tabloului

$$x_1 \ y_1 = Q_{11}$$

$$x_2 \ y_2 = Q_{21} \ Q_{22}$$

$$x_3 \ y_3 = Q_{31} \ Q_{32} \ Q_{33}$$

$$x_n \ y_n = Q_{n1} \ Q_{n2} \ Q_{n3} \dots Q_{nn}$$

function b = Neville (x, y, a)

% Intrări:

% a = abscisa în care se calculează polinomul

% x = tabloul absciselor celor n+1 puncte

% y = tabloul ordonatelor celor n+1 puncte

% Ieșiri:

% b = valoare polinom de interpolare

n = length(x) ;

q = y

for i = 1 : n

for j = 1 : n

q(j) = ((a - x(j-i)) * q(j) - (a - x(j)) * q(j-i)) / (x(j) - x(j-i)) ;

end

end

b = q(n) ;

Diferențe divizate

$$F_0[x_1] = f(x_1)$$

$$F_1[x_1, x_2] = \frac{F_0[x_1] - F_0[x_2]}{x_1 - x_2}$$

$$F_p[x_1, \dots, x_{p+1}] = \frac{F_{p-1}[x_1, \dots, x_p] - F_{p-1}[x_2, \dots, x_{p+1}]}{x_1 - x_{p+1}}$$

$$F_p[x_1, \dots, x_{p+1}] = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{f(x_k)}{\Pi'(\mathbf{x}_k)} = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{f(x_k)}{\prod_{i=1, i \neq k}^{p+1} (x_k - x_i)}$$

```

function a = DifDiv(x, y)
%   Intrări:
%   x = abscisele celor n puncte
%   y = ordinatele celor n puncte
%   ieșiri:
%   y =diferențe divizate de ordin 1:n
    n = length(x);
    for k = 1 : n-1
        y(k+1:n)=(y(k+1:n)-y(k)) ./ (x(k+1:n)-x(k)) ;
    end
    a = y(:);

```

$$F_1[x, x_1] = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) \cdot F_1[x, x_1]$$

$$F_2[x, x_1, x_2] = \frac{F_1[x, x_1] - F_1[x_1, x_2]}{x - x_2}$$

$$F_1[x, x_1] = F_1[x_1, x_2] + (x - x_2) \cdot F_2[x, x_1, x_2]$$

$$F_n[x, x_1, \dots, x_n] = \frac{F_{n-1}[x, x_1, \dots, x_{n-1}] - F_{n-1}[x_1, x_2, \dots, x_n]}{x - x_n}$$

$$F_{n-1}[x, x_1, \dots, x_{n-1}] = F_{n-1}[x_1, x_2, \dots, x_n] + (x - x_n) F_n[x, x_1, \dots, x_n]$$

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) \cdot F_1[x, x_1]$$

$$(x - x_1) F_1[x, x_1] = (x - x_1) F_1[x_1, x_2] + (x - x_1) (x - x_2) \cdot F_2[x, x_1, x_2]$$

$$(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) F_{n-1}[x, x_1, \dots, x_{n-1}] = (x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) F_{n-1}[x_1, x_2, \dots, x_n] + (x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) (x - x_n) F_n[x, x_1, \dots, x_n]$$

Adunăm relațiile și reducem termenii:

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) F_1[x_1, x_2] + (x - x_1) (x - x_2) F_2[x_1, x_2, x_3] + \dots + (x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) F_{n-1}[x_1, \dots, x_n] + (x - x_1) \dots (x - x_n) F_n[x, x_1, \dots, x_n]$$

$$F(x) = P_{n-1}(x) + E_n(x)$$

Toți termenii, mai puțin ultimul formează un polinom, care ia aceleași valori ca funcția f pe suportul interpolării $x_1, x_2, \dots, x_n$, deci reprezintă chiar polinomul de interpolare Lagrange, cunoscut sub forma "polinomul Newton":

$$P_{n-1}(x) = f(x_1) + (x - x_1) F_1[x_1, x_2] + (x - x_1) (x - x_2) F_2[x_1, x_2, x_3] + \dots + (x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) F_{n-1}[x_1, \dots, x_n]$$

Ultimul termen are semnificația unui termen de eroare și reprezintă eroarea comisă aproximând funcția prin polinomul de interpolare:

$$E_n(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n) F_n[x, x_1, \dots, x_n]$$

Pentru a găsi o majorare a erorii observăm că:

$$\begin{aligned}
 E_n(x) &= f(x) - P_{n-1}(x) && \text{are } n \text{ rădăcini} \\
 f'(x) - P'_{n-1}(x) &&& \text{are } n-1 \text{ rădăcini} \\
 f^{(n-1)}(x) - P_{n-1}^{(n-1)}(x) &&& \text{are o rădăcină}
 \end{aligned}$$

$$P_{n-1}^{(n-1)}(\mathbf{x}) = (n-1)! \cdot F_{n-1}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$$

$$f^{(n-1)}(\mathbf{x}) - (n-1)! \cdot F_{n-1}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] = 0$$

$$F_{n-1}[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n] = \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!} \quad \text{cu } \xi \in [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n]$$

$$|E_n(\mathbf{x})| \leq |(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \dots (\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)| \cdot \frac{M_n(f)}{n!}$$

$$M_n(f) = |f^{(n)}(\xi)|$$

Dacă funcția f este nedefinit derivabilă $f \in C^\infty$ atunci $M_n(f)$ crește foarte repede, deci majorarea este grosieră.

```
function b = Newton(a, x, y)
% Intrări:
% a = abscisa în care se calculează polinomul
% x = tabloul absciselor celor n puncte
% y = tabloul ordonatelor celor n puncte
% Ieșire:
% valoarea polinomului de interpolare în a
n = length(x);
a = DifDiv(x, y);
b = a(n);
for i = n-1:-1:1
    b = (a - x(i-1)).*b + a(i);
end
```

Diferențe finite

Diferențele finite sunt notații folosite în formulele de interpolare. Ele se aplică unor funcții definite în puncte echidistante $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_0 + i\mathbf{h}$,

- *diferențe progresive* (sau *diferențe înainte*)

$$\Delta f(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_{i+1}) - f(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_i + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_i)$$

$$\Delta^k f(\mathbf{x}_i) = \Delta^{k-1} f(\mathbf{x}_{i+1}) - \Delta^{k-1} f(\mathbf{x}_i)$$

- *diferențe regresive* (sau *diferențe înapoi*)

$$\nabla f(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x}_i - \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x}_{i-1}) - \frac{\quad}{\mathbf{h}}$$

$$\nabla^k f(\mathbf{x}_i) = \nabla^{k-1} f(\mathbf{x}_i) - \nabla^{k-1} f(\mathbf{x}_{i-1})$$

- *diferențe centrate*

$$\delta f(\mathbf{x}_i) = f\left(\mathbf{x}_i + \frac{\mathbf{h}}{2}\right) - f\left(\mathbf{x}_i - \frac{\mathbf{h}}{2}\right) = f\left(\mathbf{x}_{i+\frac{1}{2}}\right) - f\left(\mathbf{x}_{i-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\delta^k f(\mathbf{x}_i) = \delta^{k-1} f\left(\mathbf{x}_{i+\frac{1}{2}}\right) - \delta^{k-1} f\left(\mathbf{x}_{i-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\Delta f(\mathbf{x}_i) = \frac{f(\mathbf{x}_{i+1}) - f(\mathbf{x}_i)}{h} = \frac{E f(\mathbf{x}_i) - I f(\mathbf{x}_i)}{h} = \frac{E - I}{h} f(\mathbf{x}_i)$$

Diferențele finite pot fi exprimate prin intermediul operatorului de deplasare $E f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + h)$ și a operatorului identic $I f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$.

$$\Delta f(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_{i+1}) - f(\mathbf{x}_i) = E f(\mathbf{x}_i) - I f(\mathbf{x}_i) = (E - I) f(\mathbf{x}_i)$$

$$\nabla f(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x}_{i-1}) = I f(\mathbf{x}_i) - E^{-1} f(\mathbf{x}_i) = (I - E^{-1}) f(\mathbf{x}_i)$$

$$\delta f(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_{i+1/2}) - f(\mathbf{x}_{i-1/2}) = E^{1/2} f(\mathbf{x}_i) - E^{-1/2} f(\mathbf{x}_i) = (E^{1/2} - E^{-1/2}) f(\mathbf{x}_i)$$

Pentru a trece de la diferențele finite la diferențe divizate se folosește relația

$$\Delta^n f(\mathbf{x}_i) = \nabla^n f(\mathbf{x}_{i+n}) = \delta^n f(\mathbf{x}_{i+n/2}) = n! h^n F_n[\mathbf{x}_i \dots \mathbf{x}_{i+n}]$$

Formulele Newton - Gregory

Fie funcția cunoscută prin tabelul

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$

$\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$

în care abscisele $\mathbf{x}_i$ sunt echidistante și suntem interesați în evaluarea funcției într-un punct intermediar $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_i$.

Vom considera, în mod simplificator că acest punct poate fi situat

- la începutul tabloului $\mathbf{x}_1 < \mathbf{x} < \mathbf{x}_2$
- la sfârșitul tabloului $\mathbf{x}_{n-1} < \mathbf{x} < \mathbf{x}_n$

Prima formulă Newton-Gregory realizează interpolare la început de tablou, adică consideră $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + u h$, cu $0 < u < 1$.

$$F_k[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k] = \frac{\Delta^k f(\mathbf{x}_0)}{k! \cdot h^k}$$

$$P_1(\mathbf{x}) = P_1(\mathbf{x}_1 + u \cdot h) = P_1(u) = f(\mathbf{x}_1) + \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_1}{1! \cdot h} \cdot \Delta f(\mathbf{x}_1) + \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)}{2! \cdot h^2} \cdot \Delta^2 f(\mathbf{x}_1) + \dots$$

$$+ \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \dots (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{n-1})}{(n-1)! \cdot h^{n-1}} \cdot \Delta^{n-1} f(\mathbf{x}_1)$$

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_k = \mathbf{x} - \mathbf{x}_1 - (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_1) = u h - (k-1) h = (u - k + 1) h$$

$$p_1(u) = f_1 + \frac{u}{1!} \cdot \Delta f_1 + \frac{u \cdot (u-1)}{2!} \cdot \Delta^2 f_1 + \dots + \frac{u \cdot (u-1) \dots (u-n+2)}{(n-1)!} \cdot \Delta^{n-1} f_1$$

$$p_1(u) = f_1 + \binom{u}{1} \cdot \Delta f_1 + \binom{u}{2} \cdot \Delta^2 f_1 + \dots + \binom{u}{n-1} \cdot \Delta^{n-1} f_1$$

unde $\binom{u}{k}$ extinde notația combinărilor în cazul unui număr fracționar u .

Formulele de interpolare Newton-Gregory 2 și 3 se referă la interpolare la sfârșit de tablou și se obțin exprimând diferențele divizate prin diferențe regresive

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_n - u\mathbf{h}, \quad 0 < u < 1$$

$$p_2(u) = f_n - \binom{u}{1} \nabla f_n + \binom{u}{2} \nabla^2 f_n + \dots + (-1)^{n-1} \binom{u}{n-1} \nabla^n f_n$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_n + u\mathbf{h}, \quad -1 < u < 0$$

$$p_3(u) = f_n + \binom{u}{1} \cdot \nabla f_n + \binom{u+1}{2} \cdot \nabla^2 f_n + \dots + \binom{u+n-1}{n} \cdot \nabla^n f_n$$

Algoritmi de calcul ai polinomului de interpolare Lagrange prezintă proprietatea de instabilitate pentru un număr mai mare de puncte, datorită faptului că matricea Vandermonde este, în general, rău condiționată.

Interpolare trigonometrică.

Fie $\mathbf{F}(\Theta)$ o funcție periodică cu perioada 2π .

Vom alege ca bază a interpolării:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \theta, \quad \cos \theta, \quad \sin 2\theta, \quad \cos 2\theta, \quad \dots, \quad \sin n\theta, \quad \cos n\theta$$

Polinomul de interpolare:

$$P_n(\theta) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + b_1 \cdot \sin \theta + a_1 \cdot \cos \theta + \dots + b_n \cdot \sin n\theta + a_n \cdot \cos n\theta$$

Suportul interpolării:

$$\theta_0 = 0, \quad \theta_1 = \frac{2\pi}{2n+1} = \alpha, \quad \theta_2 = 2\alpha, \dots, \theta_{2n} = 2n\alpha = \frac{4n\pi}{2n+1}$$

Condițiile de interpolare:

$$\frac{a_0}{\sqrt{2}} + b_1 \sin \theta_k + a_1 \cos \theta_k + \dots + b_n \sin n\theta_k + a_n \cos n\theta_k = F(\theta_k), \quad k = 0 : 2n$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & \dots & \sin \theta_n & \cos \theta_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sin \theta_{2n} & \cos \theta_{2n} & \dots & \sin n \cdot \theta_{2n} & \cos n \cdot \theta_{2n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ b_1 \\ a_1 \\ \vdots \\ b_n \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(\theta_0) \\ F(\theta_1) \\ \vdots \\ F(\theta_{2n}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{f}$$

Se verifică ușor că matricea $\mathbf{V}$ este ortogonală

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^T = \frac{2 \cdot n + 1}{2} \cdot \mathbf{I}_{2n+1} \quad \mathbf{V}^{-1} = \frac{2}{2 \cdot n + 1} \cdot \mathbf{V}^T$$

$$P_n(\theta) = \frac{2}{2n+1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \sin \theta & \cos \theta & \dots & \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix} \cdot \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{F}$$

Interpolare Cebâșev.

Funcția: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \in [a, b] \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$$

este trecută mai întâi în domeniul de definiție $[-1, 1]$ prin schimbarea de variabilă:

$$x = \frac{b+a}{2} + t \cdot \frac{b-a}{2}$$

$$f\left(\frac{b+a}{2} + t \cdot \frac{b-a}{2}\right) = F(t)$$

$$F: t \in [-1, 1] \rightarrow F(t) \in \mathbb{R}$$

Utilizăm *baza polinoamelor Cebâșev*:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} T_1(x), T_2(x), \dots, T_n(x)$$

Polinomul generalizat de interpolare

$$P_n(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + a_1 \cdot T_1(t) + \dots + a_n \cdot T_n(t)$$

Suportul interpolării este definit de rădăcinile polinomului Cebâșev: $T_{n+1}(t) = 0$

$$t_i = \cos \frac{2 \cdot i + 1}{2 \cdot n + 2} \pi \quad i = 0 : n$$

Condițiile de interpolare: $P_n(t_k) = F(t_k)$, $k=0:n$

$$\frac{a_0}{\sqrt{2}} + a_1 \cdot T_1(t_k) + \dots + a_n \cdot T_n(t_k) = F(t_k) \quad k = 0 : n$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & T_1(t_0) & \dots & T_n(t_0) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & T_1(t_1) & \dots & T_n(t_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & T_1(t_n) & \dots & T_n(t_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t_0) \\ F(t_1) \\ \dots \\ F(t_n) \end{bmatrix}$$

$$V \cdot a = F$$

$$V \cdot V^T = \frac{n+1}{2} \cdot I_{n+1} \quad \Rightarrow \quad V^{-1} = \frac{2}{n+1} \cdot V^T$$

$$a = V^{-1} \cdot F = \frac{2}{n+1} \cdot V^T \cdot F$$

$$P_n(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & T_1(t) & \dots & T_n(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$P_n(t) = \frac{2}{n+1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & T_1(t) & \dots & T_n(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ T_1(t_0) & T_1(t_1) & \dots & T_1(t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_n(t_0) & T_n(t_1) & \dots & T_n(t_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F(t_0) \\ F(t_1) \\ \dots \\ F(t_n) \end{bmatrix}$$

$$P_n(t) = \frac{2}{n+1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & T_1(t) & \dots & T_n(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sum_{j=0}^n F(t_j) \\ \sum_{j=0}^n T_1(t_j) \cdot F(t_j) \\ \sum_{j=0}^n T_n(t_j) \cdot F(t_j) \end{bmatrix}$$

$$P_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n F(t_j) + \frac{2}{n+1} T_1(t) \sum_{j=0}^n T_1(t_j) F(t_j) + \dots + \frac{2}{n+1} T_n(t) \sum_{j=0}^n T_n(t_j) F(t_j)$$

$$P_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot T_i(t)$$

$$\alpha_0 = \frac{\sqrt{2}}{n+1} \cdot \sum_{j=0}^n F(t_j)$$

$$\alpha_i = \frac{2}{n+1} \cdot \sum_{j=0}^n T_i(t_j) \cdot F(t_j)$$

$$t_j = \cos \theta_j = \cos \frac{2 \cdot j + 1}{2 \cdot n + 2} \cdot \pi$$