

Curs 3

Propagarea erorilor în rezolvarea sistemelor de ecuații liniare.

O *normă vectorială* se definește ca o aplicație:

$$\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{x} \rightarrow \| \mathbf{x} \|$$

care satisface următoarele axiome:

$$\begin{aligned} 1^0 \quad & \| \mathbf{x} \| \geq 0, \\ 2^0 \quad & \| \mathbf{x} \| = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}, \\ 3^0 \quad & \| \mathbf{x} + \mathbf{y} \| \leq \| \mathbf{x} \| + \| \mathbf{y} \|, \\ 4^0 \quad & \| \alpha \cdot \mathbf{x} \| = |\alpha| \cdot \| \mathbf{x} \|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Expresia:

$$\| \mathbf{x} \|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

satisface proprietățile unei norme vectoriale. Ea este cunoscută sub numele de *norma Hölder* (sau *p-normă*).

Particularizând valorile lui p se obțin relații de calcul ale unor norme vectoriale uzuale. Astfel pentru $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$: avem:

$$\begin{aligned} p = 1 \quad & \Rightarrow \| \mathbf{x} \|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \text{norma Napoleon,} \\ p = 2 \quad & \Rightarrow \| \mathbf{x} \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \quad \text{norma Euclid,} \\ p = \infty \quad & \Rightarrow \| \mathbf{x} \|_\infty = \max_i |x_i|. \end{aligned}$$

MATLAB: $\|\mathbf{x}\|_1$ se calculează apelând funcția **norm(x,1)**, $\|\mathbf{x}\|_2$ cu **norm(x)** sau **norm(x,2)** și $\|\mathbf{x}\|_\infty$ cu **norm(x,inf)** și în general *p*-norma Hölder se calculează cu **norm(x, p)**.

Două norme $\|\cdot\|_p$ și $\|\cdot\|_q$ (nu neapărat norme Hölder), sunt *echivalente*, dacă există constantele $K_1, K_2 > 0$ astfel încât:

$$K_1 \cdot \| \mathbf{x} \|_q \leq \| \mathbf{x} \|_p \leq K_2 \cdot \| \mathbf{x} \|_q.$$

Toate normele vectoriale din $\mathbb{R}^n$ (sau $\mathbb{C}^n$) sunt echivalente.

Pot fi verificate relativ ușor relațiile:

$$\begin{aligned} \| \mathbf{x} \|_2 & \leq \| \mathbf{x} \|_1 \leq \sqrt{n} \cdot \| \mathbf{x} \|_2, \\ \| \mathbf{x} \|_\infty & \leq \| \mathbf{x} \|_1 \leq n \cdot \| \mathbf{x} \|_\infty, \\ \| \mathbf{x} \|_\infty & \leq \| \mathbf{x} \|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \| \mathbf{x} \|_\infty. \end{aligned}$$

Norma matriceală se definește axiomatic ca o aplicație:

$$\| \cdot \| : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^+, \text{ (sau } \mathbb{C}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^+)$$

$$\mathbf{A} \rightarrow \|\mathbf{A}\|$$

care satisface proprietățile:

$$1^0 \quad \|\mathbf{A}\| \geq 0,$$

$$2^0 \quad \|\mathbf{A}\| = 0 \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0},$$

$$3^0 \quad \|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|,$$

$$4^0 \quad \|\alpha \cdot \mathbf{A}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{A}\|,$$

la care se adaugă pentru “*norme consistente*” condiția suplimentară:

$$5^0 \quad \|\mathbf{A} * \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|.$$

Norma matriceală: $\sum_i \sum_j |\mathbf{A}_{ij}|$ nu este o normă matriceală consistentă.

Norma *Frobenius* se definește ca:

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\mathbf{A}(i, j)|^2}.$$

Norma matriceală subordonată unei norme vectoriale p (nu neapărat norma Holder) se exprimă prin:

$$\|\mathbf{A}\|_p = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p}.$$

O normă matriceală poate fi subordonată la două norme vectoriale:

$$\|\mathbf{A}\|_{pq} = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_q}.$$

Se obțin astfel normele matriceale mai des folosite:

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^m |\mathbf{A}_{ij}|,$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |\mathbf{A}_{ij}|,$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)} = \sigma_2(\mathbf{A}).$$

unde $\rho(\cdot)$ este raza spectrală (vezi cap.9) a matricei $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$, iar $\sigma_2(\cdot)$ este valoarea singulară maximă a matricei $\mathbf{A}$ (vezi cap.12).

MATLAB: $\|\mathbf{A}\|_1$ se calculează apelând funcția **norm(A,1)**, $\|\mathbf{A}\|_2$ cu **norm(A)** sau **norm(A,2)**, $\|\mathbf{A}\|_\infty$ cu **norm(A,inf)**, iar norma Frobenius $\|\mathbf{A}\|_F$ cu **norm(A,'fro')**.

Pentru o matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ avem relațiile:

$$\|\mathbf{A}\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|_F \leq \sqrt{n} \cdot \|\mathbf{A}\|_2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \| \mathbf{A} \|_{\infty} \leq \| \mathbf{A} \|_2 \leq \sqrt{m} \cdot \| \mathbf{A} \|_{\infty},$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \| \mathbf{A} \|_1 \leq \| \mathbf{A} \|_F \leq \sqrt{n} \cdot \| \mathbf{A} \|_1.$$

În calculele cu matrice se folosesc în mod frecvent următoarele notații:

$$| \mathbf{A} | = \left(| \mathbf{A}_{ij} | \right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

$$| \mathbf{A} | \leq | \mathbf{B} | \Rightarrow | \mathbf{A}_{ij} | \leq | \mathbf{B}_{ij} |, i = 1 : m, j = 1 : n$$

De asemenea vom scrie: $\mathbf{A} > 0$, $\mathbf{A} > \mathbf{B}$, dacă matricile $\mathbf{A}$, respectiv $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ sunt simetrice (hermitice în cazul complex) și pozitiv-definite.

În rezolvarea sistemelor de ecuații liniare, anumite matrici (rău condiționate) pot crea dificultăți, în sensul că mici variații ale datelor pot produce mari variații în soluții. Astfel dacă în sistemul de ecuații :

$$\begin{cases} 10 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + 7 \cdot x_4 = 32 \\ 7 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 + 5 \cdot x_4 = 23 \\ 8 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 10 \cdot x_3 + 9 \cdot x_4 = 33 \\ 7 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 + 10 \cdot x_4 = 31 \end{cases}$$

având soluțiile $\mathbf{x} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]'$. Se aplică termenilor liberi mici perturbații astfel încât devin:

$$\tilde{\mathbf{b}} = [32.1 \ 22.9 \ 33.1 \ 30.9]'$$

Se obțin soluțiile noului sistem:

$$\tilde{\mathbf{x}} = [9.2 \ -12.6 \ 4.5 \ -1.1]'$$

Să considerăm sistemul perturbat:

$$\mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{x} = \delta \mathbf{b}$$

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \delta \mathbf{b} \Rightarrow \| \delta \mathbf{x} \| \leq \| \mathbf{A}^{-1} \| \cdot \| \delta \mathbf{b} \|\mathbf{x} \|$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \Rightarrow \| \mathbf{b} \| \leq \| \mathbf{A} \| \cdot \| \mathbf{x} \|\mathbf{x} \|$$

$$\| \mathbf{b} \| \cdot \| \delta \mathbf{x} \| \leq \| \mathbf{A} \| \cdot \| \mathbf{A}^{-1} \| \cdot \| \mathbf{x} \| \cdot \| \delta \mathbf{b} \|\mathbf{x} \|$$

$$\frac{\| \delta \mathbf{x} \|}{\| \mathbf{x} \|} \leq \kappa(\mathbf{A}) \frac{\| \delta \mathbf{b} \|}{\| \mathbf{b} \|} \text{ în care s-a notat cu:}$$

$\kappa(\mathbf{A}) = \| \mathbf{A} \| \cdot \| \mathbf{A}^{-1} \|$ numărul de condiționare al matricei, care acționează ca un factor de amplificare al perturbării soluțiilor datorite variației termenilor liberi

O relație asemănătoare se obține în cazul perturbării matricei coeficienților :

$$(\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{x} = - \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \Rightarrow \delta \mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1} \cdot \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

$$\|\delta \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\delta \mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\| \Rightarrow \frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa(\mathbf{A}) \frac{\|\delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

Dacă în relațiile anterioare nu se neglijează termenul $\delta \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{x}$ se obține o majorare mai exactă de forma:

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\kappa(\mathbf{A}) \cdot \frac{\|\delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}}{1 - \kappa(\mathbf{A}) \cdot \frac{\|\delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}}$$

Dacă se consideră că numerele reale au mantisa reprezentată cu t cifre binare semnificative:

$$|\delta \mathbf{A}_{ij}| \leq 2^{-t} \cdot |\mathbf{A}_{ij}| \Rightarrow \|\delta \mathbf{A}\| \leq 2^{-t} \cdot \|\mathbf{A}\| \Rightarrow \frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{2^{-t} \cdot \kappa(\mathbf{A})}{1 - 2^{-t} \cdot \kappa(\mathbf{A})}$$

Se verifică relativ ușor următoarele proprietăți ale numărului de condiționare al unei matrice

$$\kappa(\mathbf{A}) \geq 1$$

$$\kappa(\mathbf{A}) = \kappa(\mathbf{A}^{-1})$$

$$\kappa(c\mathbf{A}) = \kappa(\mathbf{A})$$

Numărul de condiționare depinde de norma considerată.

În MATLAB numărul de condiționare al unei matrice în normă p se calculează cu **cond(A, p)**

Pentru matricele cu număr de condiționare mare (matrice rău condiționate) amplificarea erorilor din datele inițiale este mare, indiferent de cât de exact sunt efectuate calculele, justificând variația relativă mare a soluțiilor în raport cu variația termenilor liberi.

Hilbert	Wilson	Rutishauser
$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 \end{vmatrix}$	$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{vmatrix}$	$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 10 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & 9 \end{vmatrix}$

Metode aproximative de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare

Metodele exacte de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare, având complexitate $O(n^3)$, au aplicabilitate limitată la ordine de sisteme ce nu depășesc 1000. Pentru sisteme de dimensiuni mai mari se utilizează metode cu complexitate $O(n^2)$ într-un pas de iterație. Acestea utilizează relații de recurență, care prin aplicare repetată furnizează aproximații cu precizie controlată a soluției sistemului.

Sistemul $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ este adus la forma echivalentă $\mathbf{x} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c}$. Pornindu-se cu o aproximație inițială $\mathbf{x}^{(0)}$ a soluției se generează, folosind o relație iterativă de forma:

$$\mathbf{x}^{(p+1)} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{x}^{(p)} + \mathbf{c}$$

un șir de vectori: $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(p)}, \dots$

Matricea $\mathbf{G}$ reprezintă *matricea de iterație*, iar $\mathbf{c}$ - *vectorul de iterație*.

Aplicarea, într-un pas, a iterației are complexitatea $O(n^2)$.

Condițiile în care șirul este convergent poartă numele de *condiții de stabilitate*.

În ipoteza convergenței șirului $\lim_{p \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(p)} = \mathbf{x}^*$

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{G} \cdot \mathbf{x}^* + \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{x}^{(p)} - \mathbf{x}^* = \mathbf{G} \cdot (\mathbf{x}^{(p-1)} - \mathbf{x}^*) \Rightarrow \mathbf{e}^{(p)} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{e}^{(p-1)} = \mathbf{G}^2 \cdot \mathbf{e}^{(p-2)} = \dots = \mathbf{G}^p \cdot \mathbf{e}^{(0)}$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \mathbf{e}^{(p)} = 0 \quad \text{și} \quad \mathbf{e}^{(0)} \neq 0 \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \mathbf{G}^p = 0$$

Condiția de stabilitate admite reprezentările echivalente:

$$\|\mathbf{G}\| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho(\mathbf{G}) < 1$$

în care $\rho(\mathbf{G})$ reprezintă cea mai mare valoare proprie în valoare absolută a matricei de iterație (*raza spectrală*).

Verificarea condiției de stabilitate, în oricare din cele 3 forme, nu se face, deoarece ar implica un efort de calcul considerabil. Șirul se presupune convergent, și determinarea limitei presupune ca apropierea în normă între doi termeni din șir, în vecinătatea limitei să se facă înaintea depășirii unui număr maxim impus de iterații, adică:

$$\|\mathbf{x}^{(p+1)} - \mathbf{x}^{(p)}\| < \varepsilon \cdot \|\mathbf{x}^{(p)}\| \quad \text{și} \quad p < \text{maxiter}$$

Limita șirului trebuie să coincidă cu soluția exactă a sistemului de ecuații liniare, adică $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}$ relație cunoscută sub numele de *condiție de consistență*. O metodă stabilă și consistentă este convergentă.

Descompunem matricea sistemului sub forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{N} - \mathbf{P}$$

impunând condiția ca matricea să fie ușor de inversat

$$(\mathbf{N} - \mathbf{P}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{c}$$

în care $\mathbf{G} = \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{P}$ este matricea de iterație, iar $\mathbf{c} = \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{b}$ este vectorul de iterație.

Se partiționează matricea punând în evidență o matrice diagonală $\mathbf{D}$, o matrice strict inferior triunghiulară $\mathbf{L}$ (cu elemente diagonale nule) și o matrice strict superior triunghiulară $\mathbf{U}$.

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$$

În metoda Jacobi se alege:

$$\mathbf{N} = \mathbf{D}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{L} + \mathbf{U}$$

$$\mathbf{G}_J = \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{L} + \mathbf{U})$$

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{x}^{(p+1)} = (\mathbf{L} + \mathbf{U}) \cdot \mathbf{x}^{(p)} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}_i^{(p+1)} = \frac{\mathbf{b}_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{a}_{ij} \cdot \mathbf{x}_j^{(p)}}{\mathbf{a}_{ii}}$$

$$G_{ij} = \delta_{ij} - \frac{a_{ij}}{a_{ii}}$$

$$\|G\|_{\infty} = \max_i \sum_{j=1}^n |g_{ij}| = \max_i \sum_{j=1}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1$$

Metoda Gauss – Seidel alege:

$$N=D-L$$

$$P=U$$

$$G_{GS}=(D-L)^{-1}U$$

$$(D-L) \mathbf{x}^{(p+1)} = U \mathbf{x}^{(p)} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}_i^{(p+1)} = \frac{\mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot \mathbf{x}_j^{(p+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \cdot \mathbf{x}_j^{(p)}}{a_{ii}}$$

Metoda Gauss-Seidel este convergentă dacă matricea sistemului este diagonal dominantă pe linii.

(Reich) Metoda Gauss-Seidel este convergentă dacă matricea sistemului este simetrică și pozitiv - definită.

```
[x,succes] = GaussSeidel(A,b,x0,maxiter,tol)
% rezolvare sistem cu Gauss-Seidel
% Intrări: A = matricea sistemului
%          b = vectorul termenilor liberi
%          x0 = aproximația inițială soluției
%          maxiter = număr maxim admis de iterații
%          tol = precizia determinării soluției
% Iesiri: x = soluția sistemului
%          success = indicator convergența metoda
[m,n] = size(A);
if m~=n
    error('matricea trebuie sa fie patrata!')
end;
for k=1 : maxiter
    for i = 1 : n
        s1=A(i,1:i-1)*x(1:i-1);
        s2=A(i,i+1:n)*x0(i+1:n);
        x(i) = (b(i)-s1-s2)/A(i,i)
    end
    p = norm(x-x0,1);
    q = norm(x, 1);
    x = x0
```

```

        if p < tol*q
            break;
        end;
    end
    succes = k<=maxiter
}

```

Pentru găsirea unei descompuneri cât mai rapid convergente se introduce parametrul de relaxare w :

$$A = N - P = N - wN - P + wN = (1 - w)N - (P - wN) = N(w) - P(w)$$

$$G(w) = N^{-1}(w) \cdot P(w) = \frac{N^{-1}}{1 - w} \cdot (P - w \cdot N)$$

$$G(w) = \frac{G - w \cdot I_n}{1 - w}$$

Dacă se notează cu λ_i valorile proprii ale matricei $G = N^{-1}P$, atunci valorile proprii ale matricei $G(w)$ vor fi

$$\lambda_i(w) = \frac{\lambda_i - w}{1 - w}$$

$$\rho(G(w)) = \max_i |\lambda_i(w)| < 1$$

Determinăm w^* astfel ca:

$$\rho(G(w^*)) = \min_w \rho(G(w))$$

$$\max_i |\lambda_i(w^*)| = \min_w \max_i |\lambda_i(w)|$$

$$\max_i \left| \frac{\lambda_i - w^*}{1 - w^*} \right| = \min_{w=1} \max_i \left| \frac{\lambda_i - w}{1 - w} \right|$$

În practică, metoda suprarelaxării ia

$$N(w) = \frac{1}{w} \cdot D - L \quad P(w) = \left(\frac{1}{w} - 1 \right) \cdot D + U$$

$$G_w = (D - w \cdot L)^{-1} \cdot [(1 - w) \cdot D + w \cdot U]$$

Dacă $A_{ii} \neq 0$, atunci $\rho(G_w) > w - 1$ și condiția de stabilitate impune ca $0 < w < 2$.

Dacă matricea este tridiagonală și pozitiv-definită, atunci valoarea optimă a parametrului de relaxare este

$$w_{\text{optim}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(G_J)^2}}$$

Relația de recurență are în acest caz forma

$$N(w) \cdot \underline{x}^{(k+1)} = P(w) \cdot \underline{x}^{(k)} + \underline{b}$$

$$\left(\frac{1}{w} \cdot D + L \right) \cdot \underline{x}^{(k+1)} = \left(\frac{1 - w}{w} \cdot D - U \right) \cdot \underline{x}^{(k)} + \underline{b}$$

$$\frac{1}{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{A}_{ii} \mathbf{x}_i^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j^{(k+1)} = \frac{1 - \mathbf{w}}{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{A}_{ii} \mathbf{x}_i^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j^{(k)} + \mathbf{b}_i$$

$$\mathbf{x}_i^{(k+1)} = -\mathbf{w} \cdot \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\mathbf{A}_{ij}}{\mathbf{A}_{ii}} \cdot \mathbf{x}_j^{(k+1)} + (1 - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{x}_i^{(k)} - \mathbf{w} \cdot \sum_{j=i+1}^n \frac{\mathbf{A}_{ij}}{\mathbf{A}_{ii}} \cdot \mathbf{x}_j^{(k)} + \mathbf{w} \cdot \frac{\mathbf{b}_i}{\mathbf{A}_{ii}}$$