

Nr.1

27.05.2006

1. Se consideră o matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, pozitiv-definită și două factorizări Cholesky ale acesteia: $A=B \cdot B^T=C \cdot C^T$. Să se arate că matricele B și C diferă printr-o matrice diagonală, adică $B=C \cdot D$, cu $D^2=I$. (1p)

2. Pentru sistemul $A \cdot x=b$, s-a obținut prin metoda Jacobi, efectuând 10 iterații aproximația x' . Notând $e=x-x'$, se observă că $A \cdot e=A(x-x')=b-A \cdot x'=r$. Aceasta ne sugerează îmbunătățirea soluției obținute x' , înlocuind-o cu $x=x'+e$. Scrieți o funcție Matlab care îmbunătățește cu metoda descrisă soluția obținută. Funcția presupusă cunoscută are semnătura: `function x=jacobi(A,b,x0)`. (2p)

3. O funcție este cunoscută prin tabloul:

x	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$
y	$y(1)$	$y(2)$	$y(3)$

Scrieți o funcție Matlab pentru calculul funcțiilor spline cubice $s_1(x)$ și $s_2(x)$ în clasă C^2 , naturale cu semnătura `function a=sp1C2n(x,y)`, în care a este o matrice cu 2 linii și 4 coloane, conținând cei 4 parametri ai celor două splineuri. (2p)

4. Pentru funcția $f(x)=|x|$, $x \in (-\pi, \pi)$ determinați polinomul trigonometric de aproximare continuă în sensul celor mai mici pătrate de grad 3. (2p)

5. Se consideră polinomul de interpolare Cebășev de ordin n : $P_n(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + a_1 T_1(x) + \dots + a_n T_n(x)$

a) arătați că:

$$a_0 = \frac{\sqrt{2}}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{2n} f\left(\cos \frac{2k+1}{2n+2} \cdot \pi\right)$$

$$a_j = \frac{2}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{2n} f\left(\cos \frac{2k+1}{2n+2} \cdot \pi\right) \cdot \cos \frac{2k+1}{2n+1} \cdot \pi j$$

b) Scrieți o funcție Matlab, `function [a0,a]=cpiceb(n,f)` care calculează coeficienții polinomului Cebășev de interpolare de ordin n asociat funcției f . (2p)

6. Pentru o funcție cunoscută prin valorile y_i , în punctele x_i , $i=1:n$, să se arate că polinomul de interpolare este același cu polinomul de aproximare discretă în sensul celor mai mici pătrate. (1p)

Nr.2

27.05.2006

1. Fie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o matrice simetrică și pozitiv-definită, având factorizarea Cholesky $A=L \cdot L^T$. Arătați că $\det(A) = L_{11}^2 L_{22}^2 \dots L_{nn}^2$. (1p)

2. Se consideră sistemul $Ax=b$ cu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A tridiagonală, $b, x \in \mathbb{R}^n$. Scrieți o funcție Matlab pentru rezolvarea sistemului prin metoda iterativă Jacobi și stabiliți în ce condiții metoda converge. (2p)

3. O funcție este cunoscută prin tabloul:

x	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$
y	$y(1)$	$y(2)$	$y(3)$
dy	$dy(1)$	-	$dy(3)$

Scrieți o funcție Matlab pentru calculul funcțiilor spline cubice $s_1(x)$ și $s_2(x)$ în clasă C^2 , tensionate cu semnătura `function a=sp1C2t(x,y)`, în care a este o matrice cu 2 linii și 4 coloane, conținând cei 4 parametri ai celor două splineuri. (2p)

4. Se consideră funcția $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$. Calculați coeficienții polinomului Cebășev de grad 3 de aproximare continuă în sensul cmm. (2p)

5. Se consideră polinomul de interpolare trigonometrică de ordin n :

$$P_n(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + b_1 \sin x + a_1 \cos x + \dots + b_n \sin nx + a_n \cos nx$$

a) Arătați că:

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{2n} f\left(\frac{2\pi k}{2n+1}\right)$$

$$b_j = \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{2\pi k}{2n+1}\right) \sin \frac{2\pi k}{2n+1} j, \quad a_j = \sum_{k=0}^{2n} f\left(\frac{2\pi k}{2n+1}\right) \cos \frac{2\pi k}{2n+1} j$$

b) Scrieți o funcție Matlab `function [a0,a,b]=cpitrig(x,y,n)` pentru calculul coeficienților polinomului de interpolare trigonometrică pentru dependența $x \rightarrow y$, unde n este gradul polinomului trigonometric de interpolare, x - vectorul absciselor echidistante în $[-\pi, \pi]$, y - vectorul ordonatelor, a -vectorul coeficienților în $\cos$ și b -vectorul coeficienților în $\sin$. (2p)

6. O funcție $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, cunoscută în punctele x_i , $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ este interpolată printr-un polinom de grad n . Determinați abscisele $x_0, x_1, \dots, x_n$ care minimizează eroarea interpolării. Dați o majorare pentru eroarea minimă. (1p)

1. Să se determine descompunerea Cholesky pentru matricea $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}^*$. Scrieți apoi rezultatul pentru $a = 2$.

2. Se consideră sistemul $A \cdot x = b$, cu $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Stabiliți condițiile de convergență ale metodei Jacobi.

3. Se consideră funcția definită prin tabelul:

x	-3	-1	0	4
f(x)	2	0	3	6

a) Scrieți expresia polinomului de interpolare sub forma Newton.

b) Scrieți o funcție MATLAB pentru evaluarea polinomului de interpolare Lagrange într-un punct dat.

4. Pentru funcția f , cunoscută prin tabelul alăturat, calculați funcțiile spline tensionate în clasă C^2 , dacă $s'(1)=2$ și $s'(4)=-1$.

x	1	2	3
f(x)	3	4	1

5. Fie f o funcție periodică cu perioada 2π , cunoscută prin valorile:

x	0	$2\pi/3$	$4\pi/3$
f(x)	1	1/4	1/2

Determinați polinomul de interpolare trigonometrică de ordin 1: $p_1 = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + b_1 \sin x + a_1 \cos x$

6. Se dă funcția $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x^2 + 1$. Să se calculeze o aproximare a polinomului minimax de grad 1 pentru această funcție pe intervalul $[-1,1]$.