

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare  $A \cdot x = b$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ , cu:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & d_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & d_2 & 0 \\ c_3 & 0 & a_3 & 0 & d_3 \\ \dots & \ddots & \dots & \dots & \ddots \\ & & c_{n-2} & 0 & a_{n-2} & 0 & d_{n-2} \\ & & & \ddots & & & 0 \\ & & & & c_n & 0 & a_n \end{bmatrix}$$

Scrieți o funcție Matlab cu semnătura `function x = Gauss(a, b, c, d)` care rezolvă sistemul prin eliminare gaussiană.

2. Se consideră sistemul  $A \cdot x = b$ , cu  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $b \in \mathbb{R}^2$ ,  $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ . Matricea  $A$  nu este predominant diagonală pe linii. În aceste condiții, este convergentă metoda Gauss-Seidel?

3. Funcția  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , cunoscută numai în punctele  $x=0, a, b, 1$  prin valorile  $y_0, y_a, y_b, y_1$ , este aproximată prin polinomul său de interpolare.

- dați expresia acestuia sub forma Newton
- scrieți expresia erorii interpolării

4. Calculați funcțiile spline parabolice  $s_0(x)$  și  $s_1(x)$  pentru funcția  $f(x)$  cunoscută prin:

|      |    |   |   |
|------|----|---|---|
| $x$  | 1  | 5 | 7 |
| $f$  | -1 | 1 | 4 |
| $f'$ | -3 | - | 2 |

5. Fie funcția:  $f: [-3, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$ . Determinați polinomul de interpolare Cebășev de grad 2.

6. Fie  $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - x^2$

Să se determine valoarea exactă a polinomului minimax de gradul 2 și o valoare aproximativă a polinomului minimax de gradul 1, folosind primul algoritm Remes.

1. Pentru o matrice oarecare  $A$ , superior Hessenberg se cere să se scrie o funcție Matlab `function d=DetHes(A)` care calculează determinantul matricei.

Indicație: se elimină în prealabil subdiagonala.

2. Matricea  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  nu este predominant diagonală pe linii. Să se arate că totuși, metoda Jacobi pentru sistemul  $A \cdot x = b$  este convergentă.

3. Funcția  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , cunoscută numai în punctele  $x=0, a, b, 1$  prin valorile  $y_0, y_a, y_b, y_1$ , este aproximată prin polinomul său de interpolare.

- dați expresia acestuia sub forma Lagrange
- determinați abscisele  $a$  și  $b$  pentru care expresia erorii este minimă

4. Funcția  $f(x)$  este cunoscută prin:

|     |    |   |    |
|-----|----|---|----|
| $x$ | 1  | 3 | 4  |
| $f$ | -1 | 1 | 18 |

Calculați funcțiile spline  $s_0(x)$  și  $s_1(x)$  în clasă  $C^2$  naturale

5. Funcția  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  este cunoscută prin punctele:

|     |               |     |              |
|-----|---------------|-----|--------------|
| $x$ | $-\sqrt{3}/2$ | 0   | $\sqrt{3}/2$ |
| $f$ | -0.5          | 0.5 | -0.5         |

Calculați polinomul generalizat de interpolare Cebășev de ordinul 2.

Indicație: Se observă că abscisele sunt tocmai rădăcinile polinomului Cebășev  $T_3(x)$ .

6. Pentru funcția  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^5 - x + 1$  se cere valoarea exactă a polinomului minimax de gradul 4 și o valoare aproximativă a polinomului minimax de gradul 2, folosind primul algoritm Remes.

1. Un sistem 3-diagonal este dat prin 4 vectori: diagonală  $a$ , subdiagonală  $b$ , supradiagonală  $c$  și termenii liberi  $d$ . Scrieți o funcție Matlab `function x=tridi(a,b,c,d)` pentru rezolvarea sistemului.

2. Matricea  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  nu este predominant diagonală pe linii. Să se arate că totuși, metoda Jacobi pentru sistemul  $A \cdot x = b$  este convergentă.

3. Se consideră funcția definită prin tabelul:

|        |    |   |   |   |
|--------|----|---|---|---|
| $x$    | -3 | 1 | 0 | 4 |
| $f(x)$ | 2  | 0 | 3 | 6 |

- a) Scrieți expresia polinomului de interpolare sub forma Newton  
b) Care este expresia erorii interpolării.

4. Fie funcția  $f$ , cunoscută prin:

|        |   |   |   |
|--------|---|---|---|
| $x$    | 1 | 2 | 4 |
| $f(x)$ | 3 | 4 | 6 |

Calculați funcțiile spline tensionate în clasă  $C^2$ , știind că  $s'(1)=2$  și  $s'(4)=-1$ .

5. Pentru funcția:

|     |                |                |                |               |
|-----|----------------|----------------|----------------|---------------|
| $x$ | $\cos(7\pi/8)$ | $\cos(5\pi/8)$ | $\cos(3\pi/8)$ | $\cos(\pi/8)$ |
| $f$ | $1/2$          | 0              | $-1/2$         | 1             |

Determinați polinomul de interpolare Cebășev de grad 3.

6. Funcția  $f$  este dată prin valorile:

|        |    |      |     |   |
|--------|----|------|-----|---|
| $x$    | -1 | -0.5 | 0.5 | 1 |
| $f(x)$ | 1  | 0    | 2   | 1 |

Calculați polinomul minimax de grad 2, folosind primul algoritm al lui Remes.

Indicație: Se observă că abscisele sunt punctele de oscilație ale polinomului  $T_3(x)$ .

Acestea sunt  $\cos \frac{k\pi}{3}$ ,  $k = 0 : 3$  ( $\cos 0 = 1$ ,  $\cos \pi/3 = 0.5$ ,  $\cos 2\pi/3 = -0.5$ ,  $\cos \pi = -1$ )

1. Fie matricea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  și vectorul  $b \in \mathbb{R}^n$ :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- a) Să se calculeze normele:  $\|A\|_1$ ,  $\|A\|_\infty$ ,  $\|A\|_F$   
b) Scrieți un algoritm eficient pentru rezolvarea sistemului:  $A \cdot x = b$

2. Se consideră sistemul  $A \cdot x = b$ , cu  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $b \in \mathbb{R}^3$ .  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Stabiliți condițiile de convergență ale metodei Gauss-Seidel.

3. Funcția  $f$  este dată prin valorile:

|        |    |      |     |   |
|--------|----|------|-----|---|
| $x$    | -1 | -0.5 | 0.5 | 1 |
| $f(x)$ | 1  | 0    | 2   | 1 |

Dați polinomul de interpolare sub forma Newton și eroarea interpolării

4. Calculați funcțiile spline  $s_0(x)$  și  $s_1(x)$  în clasă  $C^1$  pentru funcția  $f(x)$  este cunoscută prin:

|      |    |   |    |
|------|----|---|----|
| $x$  | 1  | 2 | 3  |
| $f$  | -1 | 1 | 18 |
| $f'$ | -3 | 9 | 27 |

5. O funcție periodică cu perioada  $2\pi$  este cunoscută prin valorile:

|     |   |          |          |          |          |
|-----|---|----------|----------|----------|----------|
| $x$ | 0 | $2\pi/5$ | $4\pi/5$ | $6\pi/5$ | $8\pi/5$ |
| $f$ | 1 | $-1/2$   | 0        | $1/2$    | -1       |

Determinați polinomul trigonometric de interpolare de ordin 2.

6. Funcția  $f$  este dată prin valorile:

|        |    |   |    |
|--------|----|---|----|
| $x$    | -1 | 0 | 1  |
| $f(x)$ | 1  | 2 | -1 |

Calculați polinomul minimax de grad 1, folosind primul algoritm al lui Remes. (punctele de oscilație ale polinomului  $T_2(x)$  sunt

$\cos \frac{k\pi}{2}$ ,  $k = 0 : 2$  ( $\cos 0 = 1$ ,  $\cos \pi/2 = 0$ ,  $\cos 3\pi/2 = -1$ )

1. Pentru matricea nesingulară  $A_{n-1} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  se cunoaște factorizarea LU:

$$A_{n-1} = L_{n-1} U_{n-1}$$

a) Determinați factorizarea LU a matricei  $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  în care:

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & b \\ c^T & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n-1} & 0 \\ 1^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{n-1} & u \\ 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Se dau  $b, c \in \mathbb{R}^{n-1}$  și  $a_{nn}$  și se cer  $1, u \in \mathbb{R}^{n-1}$  și  $u_{nn}$

b) Scrieți o funcție Matlab recursivă de factorizare LU, pornind de la factorizarea unui bloc LU  $2 \times 2$ .

2. Fie matricea nesingulară  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  și se rezolvă sistemul  $A^T \cdot x = e$  cu

$$e = (1, 1, \dots, 1)^T. \text{ Arătați că } \|A^{-1}\|_1 = \|x\|_\infty.$$

3. Scrieți o funcție MATLAB care calculează diferențele divizate:  $F_0[x_1], F_1[x_1, x_2], \dots, F_{n-1}[x_1, \dots, x_n]$  folosind formula

$$F_{p-1}[x_1, \dots, x_p] = \sum_{i=1}^p \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p (x_i - x_j)}$$

Rezultatul este plasat în vectorul  $y$ , care inițial conține  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Semnătura: funcției:  $y = \text{DiffDiv}(x, y)$

4. Calculați funcțiile spline  $s_0(x)$  și  $s_1(x)$  în clasă  $C^1$  pentru funcția  $f(x)$  cunoscută prin:

|      |    |   |    |
|------|----|---|----|
| $x$  | 1  | 3 | 4  |
| $f$  | -1 | 1 | 18 |
| $f'$ | -3 | 9 | 27 |

5. Funcția  $f$  este dată prin valorile:

|        |    |      |     |   |
|--------|----|------|-----|---|
| $x$    | -1 | -0.5 | 0.5 | 1 |
| $f(x)$ | 1  | 0    | 2   | 1 |

Calculați polinomul de aproximare în sensul celor mai mici pătrate de grad 2, cu funcția pondere  $w(x) = 1$ .

6. Pentru funcția  $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^4 + 1$  se cere valoarea exactă a polinomului minimax de gradul 3 și o valoare aproximativă a polinomului minimax de gradul 2, folosind primul algoritm Remes.

1. În factorizarea LU a matricei  $A$  se partiționează matricea astfel:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix}$$

$$L_{11} \cdot U_{11} = A_{11}$$

$$L_{21} = A_{21} \cdot U_{11}^{-1}$$

$$U_{12} = L_{11}^{-1} \cdot A_{12}$$

$$\underline{A}_{22} = A_{22} - L_{21} \cdot U_{12}$$

$$\underline{L}_{22} \cdot U_{22} = \underline{A}_{22}$$

deci factorizarea matricei  $A$  poate fi redusă la factorizarea a două matrice mai mici  $A_{11}$  și  $\underline{A}_{22}$ , două rezolvări de sisteme triunghiulare și actualizarea matricei  $\underline{A}_{22} = A_{22} - L_{21} U_{12}$

Scrieți o funcție recursivă Matlab care obține factorizarea LU prin metoda prezentată.

2. Pentru ce valoare  $a > 0$ , matricea  $\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}$  este rău condiționată?

3. Scrieți o funcție MATLAB care calculează diferențele divizate:  $F_0[x_1], F_1[x_1, x_2], \dots, F_{n-1}[x_1, \dots, x_n]$  folosind formula de recurență. Rezultatul este plasat în vectorul  $y$ , care inițial conține  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Semnătura: funcției  $y = \text{DiffDiv}(x, y)$

4. Funcția  $f(x)$  este cunoscută prin:

|     |    |   |    |
|-----|----|---|----|
| $x$ | 1  | 2 | 3  |
| $f$ | -1 | 1 | 18 |

Calculați funcțiile spline naturale  $s_0(x)$  și  $s_1(x)$  în clasă  $C^2$ .

5. Pentru funcția  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin(x) - x \cdot \cos(x)$  se cere să se calculeze polinomul de interpolare trigonometric de ordin 2.

6. Pentru funcția  $f: [-3, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^4 - 2x + 1$  se cere valoarea exactă a polinomului minimax de gradul 3 și o valoare aproximativă a polinomului minimax de gradul 2, folosind primul algoritm Remes.

1. În factorizarea Cholesky a matricei simetrice și pozitiv definite  $A$  se fac partiționările:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21}^T \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_{11}^T & L_{21}^T \\ 0 & L_{22}^T \end{pmatrix}$$

de unde:

$$L_{11} \cdot L_{11}^T = A_{11}$$

$$L_{21}^T = L_{11}^{-1} \cdot A_{21}^T$$

$$L_{22} \cdot L_{22}^T = A_{22} - L_{21} \cdot L_{21}^T$$

adică factorizarea Cholesky a două matrice mai mici  $A_{11}$  și  $A_{22} - L_{21} \cdot L_{21}^T$ . Inversarea matricei  $L_{22}$  inferior triunghiulară se face cu relații explicite.

Scrieți o funcție recursivă Matlab pentru calculul factorizării Cholesky, folosind relațiile de mai sus.

2. Soluția exactă a sistemului de ecuații liniare  $A \cdot x = b$ ,  $\begin{bmatrix} 300 & 400 \\ 30001 & 40002 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 10001 \end{bmatrix}$  este  $x = [-1, 1]^T$ . Dacă înlocuim termenul

liber 10001 cu 9999 soluția devine  $[3, -2]^T$ . Stabiliți, fără a calcula efectiv conform definiției, limita inferioară a numărului de condiționare  $\text{cond}_1(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1$  al matricei  $A$ .

3. Scrieți o funcție Matlab care calculează coeficienții polinomului de interpolare sub forma Newton, folosind funcția Matlab `conv` pentru înmulțirea polinoamelor.

4. Funcția cunoscută în punctele:

|     |    |   |   |
|-----|----|---|---|
| $x$ | -1 | 2 | 4 |
| $f$ | 3  | 1 | 5 |

este interpolată cu funcții spline parabolice. Condițiile de interpolare sunt de tip Lagrange, iar cele de racordare impun continuitate, derivabilitate și curbura în nodurile interioare. Determinați parametrii funcțiilor spline.

5. Fie  $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - x^2$

Să se determine polinomul de aproximare în sensul celor mai mici pătrate de gradul 1, considerând funcția pondere  $w(x) = 1$ .

6. Pentru funcția  $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^6 + 1$  se cere valoarea exactă a polinomului minimax de gradul 5 și o valoare aproximativă a polinomului minimax de gradul 3, folosind primul algoritm Remes.

1. Inversa  $B$  a unei matrice inferior triunghiulare  $A$  este tot inferior triunghiulară. Partiționăm matricele și scriem că  $A \cdot B = I$ .

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{12} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} \cdot B_{11} = I_m$$

$$B_{11} = A_{11}^{-1}$$

$$A_{22} \cdot B_{22} = I_{n-m}$$

$$B_{22} = A_{22}^{-1}$$

$$A_{12} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{12} = 0$$

$$B_{12} = -A_{22}^{-1} \cdot A_{12} \cdot A_{11}^{-1}$$

Scrieți o funcție recursivă Matlab pentru calculul inversei unei matrice inferior triunghiulare.

2. Se consideră sistemul  $A \cdot x = b$ , cu  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $b \in \mathbb{R}^2$ . Stabiliți condițiile de convergență ale metodei Gauss-Seidel.

3. Scrieți o funcție Matlab cu semnătura `function b=NG1(x,y,a)` care realizează interpolare la început de tablou, folosind prima formulă de interpolare Newton-Gregory. Se știe că  $x_1 < a < x_2$ .

4. Calculați funcțiile spline  $s_0(x)$  și  $s_1(x)$  în clasă  $C^2$  tensionate pentru funcția  $f(x)$  cunoscută prin:

|      |    |   |    |
|------|----|---|----|
| $x$  | 1  | 3 | 4  |
| $f$  | -1 | 1 | 18 |
| $f'$ | -3 | - | 27 |

5. Pentru funcția  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^5 - x + 1$  se cere dreapta care aproximează cel mai bine polinomul în sensul celor mai mici pătrate cu funcția pondere 1.

6. Pentru funcția  $f: [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^5 + x^3 + 1$  se cere valoarea exactă a polinomului minimax de gradul 4 și o valoare aproximativă a polinomului minimax de gradul 3, folosind primul algoritm Remes.