

Aproximare uniformă.

1. Fie $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2$. Să se determine valoarea exactă a polinomului minimax de gradul 2 și o valoare aproximativă a polinomului minimax de gradul 1, folosind primul algoritm Remes.

2. Pentru funcția $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - x + 1$ se cere valoarea exactă a polinomului minimax de gradul 4 și o valoare aproximativă a polinomului minimax de gradul 2, folosind primul algoritm Remes.

3. Funcția f este dată prin valorile:

x	-1	-0.5	0.5	1
$f(x)$	1	0	2	1

Calculați polinomul minimax de grad 2, folosind primul algoritm al lui Remes.

Indicație: Se observă că abscisele sunt punctele de oscilație ale polinomului $T_3(x)$.

Acestea sunt $\cos \frac{k\pi}{3}$, $k = 0 : 3$ ($\cos 0 = 1$, $\cos \pi/3 = 0.5$, $\cos 2\pi/3 = -0.5$, $\cos \pi = -1$)

4. Funcția f este dată prin valorile:

x	-1	0	1
$f(x)$	1	2	-1

Calculați polinomul minimax de grad 1, folosind primul algoritm al lui Remes.

Indicație: Se observă că abscisele sunt punctele de oscilație ale polinomului $T_2(x)$.

$\cos \frac{k\pi}{2}$, $k = 0 : 2$ ($\cos 0 = 1$, $\cos \pi/2 = 0$, $\cos 3\pi/2 = -1$)

5. Pentru funcția $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 1$ se cere valoarea exactă a polinomului minimax de gradul 3 și o valoare aproximativă a polinomului minimax de gradul 2, folosind primul algoritm Remes.

6. Scrieți o funcție Matlab cu semnătura: **function a=Remes1(n,f)**, care calculează coeficienții polinomului minimax de grad n , folosind primul algoritm al lui Remes. Funcția f este definită pe $[-1, 1]$. Se va defini și folosi o funcție pentru calculul coeficienților polinomului de interpolare Lagrange de grad n al unei funcții date prin două tablouri x și y , funcție cu semnătura: **a=CoefLagr(n,x,y)**.

Aproximare în sensul cmm.

Aproximare polinomială continuă.

1. Pentru funcția $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - x + 1$. Se cere dreapta care aproximează cel mai bine polinomul în sensul celor mai mici pătrate cu funcția pondere 1.

2. Fie $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2$. Să se determine polinomul de aproximare în sensul celor mai mici pătrate de gradul 1, considerând funcția pondere $w(x) = 1$.

Aproximare polinomială discretă.

1. Funcția f este dată prin valorile:

x	-1	-0.5	0.5	1
$f(x)$	1	0	2	1

Calculați polinomul de aproximare în sensul celor mai mici pătrate de grad 2, cu funcția pondere $w(x)=1$.

2. Funcția f este dată prin valorile:

x	-1	0	1
$f(x)$	1	2	-1

Calculați polinomul de aproximare în sensul celor mai mici pătrate de grad 2, cu funcția pondere $w(x)=1$.

3. Să se arate că pentru o funcție f , cunoscută prin

x	x_0	x_1	. . .	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	. . .	$f(x_n)$

polinomul de interpolare $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0 : n$ este același cu polinomul de aproximare discretă în sensul celor mai mici pătrate de grad n , $Q_n(x)$, adică

$$P_n(x) \equiv Q_n(x).$$

4. Scrieți o funcție Matlab, cu semnătura: $[x,y]=Sist(a,b,c)$ care rezolvă sistemul supradeterminat $a_i x + b_i y = c_i$, $i=1:n$, în sensul celor mai mici pătrate.

5. Rezolvați sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + y = 3 \\ x + 3y = 6 \\ 4x - 4y = 1 \end{cases}$$

În sensul celor mai mici pătrate

Aproximare trigonometrică continuă

1. Pentru funcția $f(x)=|x|$, $x \in (-\pi, \pi)$ determinați polinomul trigonometric de aproximare continuă în sensul celor mai mici pătrate de grad 3.

2. Pentru funcția $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \cos x$. Determinați polinomul trigonometric

$$P = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + a_1 \cdot \cos(x) + a_2 \cdot \sin(x)$$

care realizează aproximarea continuă conform principiului celor mai mici pătrate.

3. Se știe că baza: $\sin(x)$, $\sin(2x)$, ..., $\sin(nx)$ este ortogonală în raport cu produsul scalar continuu:

$$\int_{-\pi}^{\pi} u_q(x) \cdot u_r(x) dx = \begin{cases} 0 & q \neq r \\ \pi & q = r \end{cases}$$

Funcția f impară, poate fi aproximată în sensul celor mai mici pătrate sub forma:

$$p_n(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_n \sin nx$$

Scrieți o funcție Matlab pentru calculul coeficienților polinomului de aproximare continuă trigonometrică în sensul celor mai mici pătrate, având semnătura: **b=trig(n, f)**. Pentru calculul integralelor se consideră cunoscută funcția: **function y=Integ(n, f)**. 2px

4. Se știe că baza: **sin(x), sin(2x), ..., sin(nx)** este ortogonală în raport cu produsul scalar continuu:

$$\int_{-\pi}^{\pi} u_q(x) \cdot u_r(x) dx = \begin{cases} 0 & q \neq r \\ \pi & q = r \end{cases}$$

O funcție **f** impară, poate fi aproximată în sensul celor mai mici pătrate sub forma:

$$p_n(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_n \sin nx$$

Pentru funcția **f(x) = x + sin x**, $x \in (-\pi, \pi)$ determinați polinomul trigonometric de aproximare de ordin 3, în sensul celor mai mici pătrate

4.a) Arătați că baza:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(x) \cos(x) \wedge \sin(px) \cos(px)$$

este ortogonală în raport cu produsul scalar continuu:

$$\int_0^{2\pi} u_q(x) \cdot u_r(x) dx = \begin{cases} 0 & q \neq r \\ \pi & q = r \end{cases}$$

b) Folosind proprietatea de la pct. a) să se calculeze coeficienții polinomului minimal de aproximare continuă trigonometrică în sensul celor mai mici pătrate:

$$p(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + b_1 \sin x + a_1 \cos x + \dots + b_p \sin px + a_p \cos px$$

5. Știind că baza: $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(x) \cos(x) \wedge \sin(nx) \cos(nx)$ este ortogonală în raport cu produsul scalar continuu:

$$\int_0^{2\pi} u_q(x) \cdot u_r(x) dx = \begin{cases} 0 & q \neq r \\ \pi & q = r \end{cases}$$

Să se calculeze polinomul trigonometric de aproximare în sensul celor mai mici pătrate pentru funcția **f(x) = |x|**, $x \in (-\pi, \pi)$

Aproximare trigonometrică discretă

1. Se știe că baza trigonometrică:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \cos x \wedge \sin nx \cos nx \text{ este ortogonală în raport cu produsul scalar}$$

$$\text{discret, } \sum_{k=0}^{2n-1} u_p(x_k) \cdot u_q(x_k) = \begin{cases} 0 & p \neq q \\ n & p = q \end{cases}, \text{ cu } x_k = \frac{k\pi}{n}, k = 0 : 2n - 1$$

$$\text{a) arătați că: } a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sum_{k=0}^{2n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$b_j = \sum_{k=0}^{2n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \cdot \sin \frac{nkj}{n}$$

$$a_j = \sum_{k=0}^{2n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \cdot \cos \frac{nkj}{n}$$

b) scrieți o funcție Matlab, **function [a0,b,a]=cpitrig(n, f)** care calculează coeficienții polinomului trigonometric de interpolare de ordin **n** asociat funcției **f**

2. Pentru funcția **f**, cunoscută prin

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
f(x)	-1	0	1	2

calculați cel mai bun polinom de aproximare trigonometrică în sensul celor mai mici pătrate de ordin 2.

3. Se știe că baza: $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(x) \cos(x) \wedge \sin(nx) \cos(nx)$ este ortogonală în raport cu produsul scalar discret:

$$\sum_{k=0}^{2n-1} u_q(x_k) \cdot u_r(x_k) = \begin{cases} 0 & q \neq r \\ n & q = r \end{cases} \text{ cu } x_k = \frac{\pi \cdot k}{n}, k = 0 : 2n - 1$$

Calculați coeficienții polinomului de aproximare discretă trigonometrică în sensul celor mai mici pătrate:

$$p(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + b_1 \sin x + a_1 \cos x \wedge + b_n \sin nx + a_n \cos nx$$

4. Se știe că baza: $\sin(x), \sin(2x), \dots, \sin(nx)$ este ortogonală în raport cu produsul scalar discret:

$$\sum_{k=1}^n u_q(x_k) \cdot u_r(x_k) = \begin{cases} 0 & q \neq r \\ \frac{n+1}{2} & q = r \end{cases} \text{ cu } x_k = \frac{\pi \cdot k}{n+1}, k = 1 : n$$

Calculați coeficienții polinomului de aproximare discretă trigonometrică în sensul celor mai mici pătrate: $p(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x \wedge + b_n \sin nx$

Aproximare Cebâșev continuă

1. Se consideră funcția $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x\sqrt{1-x^2}$. Calculați coeficienții polinomului Cebâșev de grad 3 de aproximare continuă în sensul ccmp.

2. Pentru funcția $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^5 - x + 1$ se cere:
Polinomul de aproximare în sensul celor mai mici pătrate Cebâșev de grad 2.

3. Pentru funcția $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$, determinați polinomul

$P = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x)$ care realizează aproximarea continuă conform principiului celor mai mici pătrate

Aproximare Cebâșev discretă

1. Se știe că baza Cebâșev: $\frac{1}{\sqrt{2}} T_1(\mathbf{x}) \wedge T_n(\mathbf{x})$ este ortogonală în raport cu produsul scalar

$$\sum_{k=0}^n u_p(\mathbf{x}_k) \cdot u_q(\mathbf{x}_k) = \begin{cases} 0 & p \neq q \\ \frac{n+1}{2} & p = q \end{cases} \text{ în care } \mathbf{x}_k, k=0:n \text{ sunt rădăcinile polinomului}$$

Cebâșev de gradul $n+1$: $T_{n+1}(\mathbf{x}_k)=0$

a) arătați că: $a_0 = \frac{\sqrt{2}}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{2n} f\left(\cos \frac{2k+1}{2n+2} \cdot \pi\right)$

$$a_j = \frac{2}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{2n} f\left(\cos \frac{2k+1}{2n+2} \cdot \pi\right) \cdot \cos \frac{2k+1}{2n+2} \cdot \pi j$$

b) scrieți o funcție Matlab, **function [a0,a]=cpiceb(n,f)** care calculează coeficienții polinomului Cebâșev de grad n de aproximare în sensul celor mai mici pătrate, asociat unei funcții $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$

2. Se știe că baza Cebâșev: $\frac{1}{\sqrt{2}} T_1(\mathbf{x}) \wedge T_n(\mathbf{x})$ este ortogonală în raport cu produsul scalar

discret:

$$\sum_{k=0}^n u_q(\mathbf{x}_k) \cdot u_r(\mathbf{x}_k) = \begin{cases} 0 & q \neq r \\ \frac{n+1}{2} & q = r \end{cases} \text{ cu } T_{n+1}(\mathbf{x}_k) = 0, k = 0 : n$$

Scrieți o funcție Matlab pentru calculul coeficienților polinomului de aproximare discretă Cebâșev în sensul celor mai mici pătrate:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + a_1 T_1(\mathbf{x}) + \wedge + a_n T_n(\mathbf{x})$$

Având semnătura: **function a=Ceby(n,y)**, în care $\mathbf{y}$ este vectorul valorilor funcției f în

rădăcinile polinomului Cebâșev. ($\mathbf{x}_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n+2}$, $k = 0 : n$)

Funcția este cunoscută în punctele $\mathbf{x}_k$ pentru care $T_{n+1}(\mathbf{x}_k)=0$ prin:

$\mathbf{x}$	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	...	$\mathbf{x}_n$
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$	$\mathbf{y}_0$	$\mathbf{y}_1$	...	$\mathbf{y}_n$

3. Se știe că baza Cebâșev: $\frac{1}{\sqrt{2}} T_1(\mathbf{x}) \wedge T_n(\mathbf{x})$ este ortogonală în raport cu produsul scalar

discret:

$$\sum_{k=0}^n u_q(\mathbf{x}_k) \cdot u_r(\mathbf{x}_k) = \begin{cases} 0 & q \neq r \\ \frac{n+1}{2} & q = r \end{cases} \text{ cu } T_{n+1}(\mathbf{x}_k) = 0, k = 0 : n$$

Calculați polinomul de aproximare discretă Cebâșev în sensul celor mai mici pătrate de grad 2

știind că funcția f cunoscută în punctele:

$\mathbf{x}$	$-\sqrt{3}/2$	0	$\sqrt{3}/2$	
--------------	---------------	---	--------------	--

f	1/2	1	-1/2	
---	-----	---	------	--

Integrare numerică.

Metode Newton-Cotes

1. Calculați aproximativ integrala: $\int_0^1 \ln(1 + x^2) dx$

- Folosind formula compusă a trapezelor cu $n=4$
- Scrieți o funcție Matlab care calculează o integrală, prin metoda compusă a lui Simpson.

2. Pentru formula de integrare de tip Newton-Cotes: $\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=0}^n a_{in} f(x_{in})$

Să se arate că: $a_{in} = \int_a^b w(x)l_{in}(x)dx$, în care $l_{in}(x)$ reprezintă multiplicatorii din formula de interpolare Lagrange.

Metode gaussiene.

1. Pentru formula de integrare gaussiană: $\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=0}^n a_{in} f(x_{in})$ Să se arate că:

$$a_{in} = \int_a^b w(x) l_{in}^2(x) dx$$

în care $l_{in}(x)$ reprezintă multiplicatorii din formula de interpolare Lagrange.

2. Se consideră integrala $I = \int_{-1}^1 f(x)dx$ și formula de integrare:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + a_3 f(x_3) + b_1 f(-1) + b_2 f(1). \text{ Determinați } x_i, a_i,$$

$i=1:3, b_1$ și b_2 astfel încât formula să aibă grad maxim de valabilitate. Precizați gradul de valabilitate al formulei.

Indicație: Nodurile x_1, x_2 și x_3 se determină din condițiile de ortogonalitate:

$$\int_{-1}^1 \pi(x)\rho(x)x^k dx = 0, \quad k=0:2, \text{ în care } \pi(x) = \prod_{i=1}^3 (x - x_i), \rho(x) = (x - 1)(x + 1).x$$

3. În formula de integrare gaussiană:

$$\int_a^b f(x) \cdot w(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot f(x_i)$$

nodurile x_i sunt determinate din condiția de ortogonalitate a polinomului: $\pi(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$

cu un polinom oarecare de grad mai mic decât $\pi(x)$, în particular x^k :

$$\int_a^b \pi(x) \cdot w(x) \cdot x^k dx = 0, \quad k = 0 : n - 1$$

4. Extinderea formulei de integrare, prin adăugarea unor noduri date $\mathbf{z}_i, i=1 : m$ conduce la următoarea formulă de integrare:

$$\int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \cong \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{f}(\mathbf{z}_i)$$

Determinarea nodurilor $\mathbf{x}_i$, în acest caz, se face din condiția de ortogonalitate extinsă:

$$\int_a^b \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \rho(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}^k \, d\mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{k} = 0 : n - 1$$

în care:

$$\rho(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^m (\mathbf{x} - \mathbf{z}_i)$$

Coeficienții $\mathbf{a}_i, i = 1 : n$ și $\mathbf{b}_i, i = 1 : m$, se determină impunând ca formula să fie exactă pentru polinoame până la un anumit grad ($n+m$).

5. Pentru formula de integrare:

$$\int_{-1}^1 \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \approx \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) + \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{f}(-1) + \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{f}(1)$$

Se cere să se determine $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$, astfel încât formula să aibă grad de valabilitate cât mai ridicat.

6. Se consideră formula de integrare:
$$\int_{-1}^1 \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \mathbf{K}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_2))$$

Să se determine $\mathbf{K}, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ astfel încât formula să aibă gradul de valabilitate cel mai mare posibil.

7. Se consideră formula de integrare:

$$\int_0^1 \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \approx \mathbf{a}_1 \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{a}_2 \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) + \mathbf{b}_1 \mathbf{f}(0) + \mathbf{b}_2 \mathbf{f}(1).$$

Determinați $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ astfel încât formula să aibă gradul de valabilitate maxim.

Indicație: Nodurile $\mathbf{x}_1$ și $\mathbf{x}_2$ se determină din condițiile de ortogonalitate:

$$\int_0^1 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} - 1) \mathbf{x}^k \, d\mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{k} = 0, 1.$$

Coeficienții formulei se determină impunând formulei de integrare un grad de valabilitate corespunzător.

8 Se consideră integrala:
$$\mathbf{I} = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$
 și formula de integrare:
$$\mathbf{I} \approx \mathbf{a}_1 \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{a}_2 \mathbf{f}(\mathbf{x}_2).$$

Determinați $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{a}_1$ și $\mathbf{a}_2$ astfel încât formula să aibă gradul de valabilitate maxim.

Indicație: Nodurile $\mathbf{x}_1$ și $\mathbf{x}_2$ se determină fie direct, ca rădăcini ale polinomului ortogonal Lagrange, fie din condiția de ortogonalitate:

$$\int_a^b (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{x}^k \, d\mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{k} = 0, 1.$$

9. Pentru calculul integralei $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$ se propun următoarele formule de integrare:

- (1) $I \approx K(f(x_1) + f(x_2))$
- (2) $I \approx a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2)$
- (3) $I \approx a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + b_1 f(-1) + b_2 f(1)$

Determinați în cele 3 cazuri nodurile x_1 și x_2 și coeficienții K , a_i și b_i , $i=1:2$, știind că formulele au grade de valabilitate maximă. Care dintre formule este mai bună?

Indicație: În formula (2) nodurile x_1 și x_2 se determină fie direct, ca rădăcini ale polinomului ortogonal Lagrange, fie din condiția de ortogonalitate:

$$\int_a^b (x - x_1)(x - x_2) \cdot x^k dx = 0, \quad k = 0, 1.$$

Pentru formula (3) condiția de ortogonalitate extinsă este:

$$\int_a^b (x - x_1)(x - x_2) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot x^k dx = 0, \quad k = 0, 1.$$

Ponderile se determină din sistemul obținut, impunând formulei gradul de valabilitate corespunzător.

10. a) Calculați integrala: $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2} dx}{x^2 + x + 1}$, folosind o formulă gaussiană de ordin 2 (cu 2 termeni).

b) Scrieți o funcție Matlab: function $y=GH(n, f)$ pentru calculul integralei $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) dx$,

folosind o formulă Gauss-Hermite cu n termeni. Ponderile se calculează rezolvând sistemul linear obținut, impunând ca formula să fie exactă pentru polinoame de grad 0, 1,...

Indicație: Nodurile x_1 și x_2 se determină fie direct, ca rădăcini ale unui polinom ortogonal Hermite, fie din condiția de ortogonalitate:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - x_1)(x - x_2) \cdot w(x) \cdot x^k dx = 0, \quad k = 0, 1. \quad \text{Valorile integralelor}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{-x^2} dx \quad \text{se obțin cu formula de recurență: } I_n = \frac{n-1}{2} \cdot I_{n-2},$$

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx = 0.$$

11. Se consideră integrala $I = \int_0^a f(x) dx$ și formula de integrare:

$$\int_0^a f(x) dx \approx a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + b_1 f(0) + b_2 f(a).$$

Determinați x_i , a_i , b_i , $i=1:3$, astfel încât formula să aibă grad maxim de valabilitate. Precizați gradul de valabilitate al formulei.

Indicație: Nodurile x_1 și x_2 se determină din condițiile de ortogonalitate:

$$\int_{-1}^1 (x - x_1)(x - x_2)x(x - a)x^k dx = 0, \quad k=0:1. \quad \text{Coeficienții se determină impunând}$$

formulei de integrare un grad de valabilitate corespunzător.

12. a) Construiți o formulă de integrare de ordin 2, de tip Gauss pentru calculul unei integrale

definite de forma: $I = \int_{-\infty}^a e^t f(t) dt$

b) Scrieți o funcție Matlab care calculează integrala pe baza formulei de la punctul a)

13. Construiți formule de integrare de tip Gauss pentru integralele:

$$I_1 = \int_a^b \frac{f(t) dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} \quad I_2 = \int_a^b \sqrt{(t-a)(b-t)} f(t) dt$$

având grad de valabilitate 3.

14. Pentru formula de integrare:

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x) dx = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2)$$

determinați $a_0, a_1, a_2, x_0, x_1, x_2$ astfel încât formula să aibă gradul de valabilitate maxim posibil.

15. Se consideră formula de integrare:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = a_0 f(-1) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + a_3 f(1)$$

Să se determine $x_1, x_2, a_0, a_1, a_2, a_3$ astfel încât formula să aibă gradul de valabilitate 5.

Indicație: Polinomul cu rădăcinile x_1 și x_2 trebuie să fie ortogonal cu polinoamele de grad ≤ 1 relativ la funcția pondere $w(x) = (x+1)(x-1)$. Coeficienții a_0, a_1, a_2 și a_3 se determină impunând ca formula să fie exactă pentru polinoame de grad 0, 1, 2, 3.

16. a) Construiți o formulă de integrare de tip Gauss cu 4 termeni pentru integrala:

$$I = \int_a^b \frac{f(t) dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}$$

b) Scrieți o funcție Matlab pentru calculul integralei precedente, folosind o formulă cu n termeni. Funcția are semnătura **function GC(a,b,n,f)**

17. Polinoamele Laguerre se calculează cu relația de recurență:

$$G_n = \frac{2n-1-x}{n} \cdot G_{n-1} - \frac{n-1}{n} \cdot G_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad G_0 = 1, \quad G_1 = 1-x$$

a) Pentru integrala $I = \int_0^\infty e^{-x} f(x) dx$ stabiliți formula de integrare Gauss-Laguerre cu doi termeni.

b) Scrieți o funcție Matlab, function **g=Laguerre(n)**, care calculează coeficienții polinomului Laguerre, pe baza formulei de recurență. (Produsul a două polinoame **p** și **q** se calculează apelând funcția **r=conv(p,q)**)

c) Scrieți o funcție Matlab, function **z=GG(n, f)** care calculează integrala, folosind o formulă Gauss-Laguerre cu n termeni. Ponderile din formulă se calculează cu relația:

$$A_k = \frac{x_k}{(n+1)^2 G_{n+1}(x_k)}, \quad k = 1 : n.$$

Rădăcinile x ale polinomului **p** se calculează cu **x=roots(p)**.

18. Polinoamele Laguerre se calculează cu relația de recurență:

$$G_n = \frac{2n-1-x}{n} \cdot G_{n-1} - \frac{n-1}{n} \cdot G_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad G_0 = 1, \quad G_1 = 1-x$$

a) Pentru integrala $I = \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx$ stabiliți formula de integrare Gauss-Laguerre cu doi termeni.

b) Scrieți o funcție Matlab, function **g=Laguerre(n)**, care calculează coeficienții polinomului Laguerre, pe baza formulei de recurență. (Produsul a două polinoame **p** și **q** se calculează apelând funcția **r=conv(p,q)**)

c) Scrieți o funcție Matlab, function **z=GG(n, f)** care calculează integrala, folosind o formulă Gauss-Laguerre cu **n** termeni. Ponderile din formulă se calculează prin rezolvarea unui sistem de ecuații în care se impune un grad de valabilitate determinat. Integralele care apar ca termeni liberi de forma $\int_0^{\infty} x^k e^{-x} dx$ se calculează cu relație de recurență.

Rădăcinile **x** ale polinomului **p** se calculează cu **x=roots(p)**.

19. Polinoamele Hermite se calculează cu relația de recurență:

$$H_n = 2x \cdot H_{n-1} - 2 \cdot (n-1) \cdot H_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad H_0 = 1, \quad H_1 = 2x$$

a) Pentru integrala $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx$ stabiliți formula de integrare Gauss-Hermite cu 2 termeni.

b) Scrieți o funcție Matlab, function **g=Hermite(n)**, care calculează coeficienții polinomului Hermite, pe baza formulei de recurență. (Produsul a două polinoame **p** și **q** se calculează apelând funcția **r=conv(p,q)**)

c) Scrieți o funcție Matlab, function **z=GH(n, f)** care calculează integrala, folosind o formulă Gauss-Hermite cu **n** termeni. Ponderile din formulă se calculează cu relația:

$$A_k = \frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{H_{n+1}^2(x_k)}, \quad k = 1 : n.$$

Rădăcinile **x** ale polinomului **p** se calculează cu **x=roots(p)**.

20. Polinoamele Hermite se calculează cu relația de recurență:

$$H_n = 2x \cdot H_{n-1} - 2 \cdot (n-1) \cdot H_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad H_0 = 1, \quad H_1 = 2x$$

a) Pentru integrala $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx$ stabiliți formula de integrare Gauss-Hermite cu doi termeni.

b) Scrieți o funcție Matlab, function **g=Hermite(n)**, care calculează coeficienții polinomului Hermite, pe baza formulei de recurență. (Produsul a două polinoame **p** și **q** se calculează apelând funcția **r=conv(p,q)**)

c) Scrieți o funcție Matlab, function **z=GH(n, f)** care calculează integrala, folosind o formulă Gauss-Hermite cu **n** termeni. Ponderile din formulă se calculează prin rezolvarea unui sistem de ecuații în care se impune un grad de valabilitate determinat. Integralele care apar ca termeni liberi

de forma $\int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-x^2} dx$ se calculează cu relație de recurență. Se cunoaște că $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Rădăcinile **x** ale polinomului **p** se calculează cu **x=roots(p)**.

21. Polinoamele Legendre se calculează cu relația de recurență:

$$L_n = \frac{2n-1}{n} \cdot L_{n-1} - \frac{n-1}{n} \cdot L_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad L_0 = 1, \quad L_1 = x$$

a) Pentru integrala $I = \int_{-1}^3 f(x) dx$ stabiliți formula de integrare Gauss-Legendre cu trei termeni.

b) Scrieți o funcție Matlab, function **g=Legendre(n)**, care calculează coeficienții polinomului Legendre, pe baza formulei de recurență. (Produsul a două polinoame **p** și **q** se calculează apelând funcția **r=conv(p,q)**)

c) Scrieți o funcție Matlab, function **z=GL(n,a,b,f)** care calculează integrala, folosind o formulă Gauss-Legendre cu **n** termeni. Ponderile din formulă se calculează prin rezolvarea unui sistem de ecuații în care se impune un grad de valabilitate determinat.

Indicație: Se face în prealabil schimbarea de variabilă pentru a trece din **[a, b]** în **[-1, 1]**
Se pot utiliza funcțiile din Matlab **polyder(p)**, **polyeval(p)**, **feval(f)**, **roots(p)**

22. Polinoamele Legendre se calculează cu relația de recurență:

$$L_n = \frac{2n-1}{n} \cdot L_{n-1} - \frac{n-1}{n} \cdot L_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad L_0 = 1, \quad L_1 = x$$

a) Pentru integrala $I = \int_1^5 f(x) dx$ stabiliți formula de integrare Gauss-Legendre cu trei termeni.

b) Scrieți o funcție Matlab, function **g=Legendre(n)**, care calculează coeficienții polinomului Legendre, pe baza formulei de recurență. (Produsul a două polinoame **p** și **q** se calculează apelând funcția **r=conv(p,q)**)

c) Scrieți o funcție Matlab, function **z=GL(n,a,b,f)** care calculează integrala, folosind o formulă Gauss-Legendre cu **n** termeni. Ponderile din formulă se calculează cu relația:

$$A_k = \frac{2 \cdot (1 - x_k^2)}{n^2 \cdot L'_{n-1}(x_k)}, \quad k = 1 : n.$$

Indicație: Se face în prealabil schimbarea de variabilă pentru a trece din **[a, b]** în **[-1, 1]**
Se pot utiliza funcțiile din Matlab **polyder(p)**, **polyeval(p)**, **feval(f)**, **roots(p)**

23. Se consideră formula de integrare gaussiană $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \cdot f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k \cdot f(x_k)$ în

care x_k , $k=1:n$ sunt rădăcinile polinomului ortogonal Cebâșev de speța a doua $U_n(x)$ definit ca: $U_n(x) = T'_{n+1}(x) / (n+1)$, în care $T_n(x)$ este polinomul Cebâșev de speța întâia.

a) Calculați x_1 , x_2 , x_3 , A_1 , A_2 și A_3 din formula de integrare, în cazul particular $n=3$.

b) Scrieți o funcție Matlab cu semnătura **y=Ceb2(n, 'f')**, care calculează valoarea unei integrale, cu formula de mai sus.

24. Se consideră integrala: $I = \int_{-\infty}^a e^t f(t) dt$

a) Stabiliți o formulă de integrare de tip gaussian cu doi termeni. Se vor determina A_1 , A_2 , x_1 și x_2 .

b) Scrieți o funcție Matlab pentru calculul valorii integralei cu semnătura **z=GLg(a,n,'f')** folosind o formulă gaussiană cu **n** termeni.

Indicație: Se face în prealabil o schimbare de variabilă. Polinomul ortogonal Laguerre are formula de recurență:

$$(n+1) G_{n+1}(x) = (2n+1-x) G_n(x) - n G_{n-1}(x), \quad G_0(x)=1, \quad G_1(x)=1-x. \quad 311-2CB$$

25. Formula de integrare Gauss-Radau are forma: $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \sum_{i=0}^N A_i f(x_i)$ și este exactă pentru polinoame de grad $\leq 2N$ utilizează ca abscise x_i zerourile polinomului $T_{N+1}(x) - T_N(x)$

a) Dezvoltați o formulă de integrare cu $N=3$

b) Scrieți o funcție Matlab care implementează metoda de integrare pentru N oarecare.

26. Formula de integrare Gauss-Lobatto are forma: $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \sum_{i=0}^N A_i f(x_i)$ și este exactă pentru polinoame de grad $\leq 2N-1$ Aceasta utilizează ca abscise x_i zerourile polinomului

$$(1-x^2) T_N'(x)$$

a) Dezvoltați o formulă de integrare cu $N=3$

b) Scrieți o funcție Matlab care implementează metoda de integrare pentru N oarecare.

Ecuatii diferențiale.

Metode Runge-Kutta

1. Rezolvarea problemei diferențiale $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ printr-o metodă Runge-Kutta de ordin 2 are forma:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{K_1 + K_2}{2} \quad (\text{metoda tangentei ameliorate})$$

$$K_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2}\right)$$

Scrieți o funcție Matlab pentru integrarea sistemului:

$$y'_1 = f_1(x, y_1, y_2), \quad y_1(x_0) = y_{10}$$

$$y'_2 = f_2(x, y_1, y_2), \quad y_2(x_0) = y_{20}$$

prin metoda tangentei ameliorate, după ce, în prealabil, ați rescris relațiile pentru sistem.

2. Pentru rezolvarea problemei Cauchy se folosește mai întâi metoda Euler, iar soluțiile furnizate de aceasta servesc ca valori inițiale pentru o metodă multipas explicită de ordin 2.

a) Scrieți relațiile folosite în ambele situații

b) Scrieți funcții Matlab care implementează aceste metode

3. Pentru rezolvarea problemei diferențiale $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ se folosește metoda Runge-Kutta de ordin 4 și rang 4.

a) Scrieți relațiile corespunzătoare.

b) Scrieți relațiile pentru un sistem de două ecuații diferențiale.

c) scrieți o funcție Matlab care integrează sistemul de ecuații diferențiale prin metoda Runge-Kutta, având semnătura:

function [y1,y2]=RK44(a,b,n,'f1','f2',y10,y20)

4. Pentru rezolvarea problemei Cauchy se folosește mai întâi metoda Runge-Kutta de ordin 4, iar soluțiile furnizate servesc ca valori inițiale pentru o metodă multipas explicită de ordin 2.

a) Scrieți relațiile folosite în ambele situații

b) Scrieți funcții Matlab care implementează aceste metode

Metode multipas.

1. Pentru problema diferențială:

$$y' = f(y, t)$$

$$y(t_0) = y_0$$

Se consideră formula aproximativă de integrare:

$$y_{k+1} = y_k + h(\alpha_1 y'_{k+1} + \alpha_0 y'_k) + h^2(\beta_1 y''_{k+1} + \beta_0 y''_k)$$

Determinați α_0 , α_1 , β_0 , β_1 , astfel încât formula să aibă gradul de valabilitate cel mai ridicat. Care este expresia erorii într-un pas.

2. Pentru rezolvarea problemei diferențiale Cauchy se utilizează o metodă predictor-corector, pentru care se propun formulele de integrare:

$$y_{k+1} = y_{k-3} + h \sum_{j=0}^2 \beta_j y'_{k-j}$$

$$y_{k+1} = y_{k-1} + h \sum_{j=0}^2 \chi_j y'_{k+1-j}$$

- Determinați coeficienții β_j și χ_j astfel încât formulele să aibă gradul de valabilitate maxim.
- Precizați metoda predictor-corector folosită
- Scrieți o funcție Matlab care implementează metoda predictor-corector.

3. a) Calculați coeficienții formulelor explicite și implicite de tip Adams, de ordin 3:

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{j=0}^2 \beta_j f_{k-j}$$

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{j=0}^2 \chi_j f_{k+1-j}$$

- Definiți cu cele două formule o metodă predictor-corector.
- Scrieți o funcție Matlab care implementează metoda predictor-corector.

4. Pentru rezolvarea problemei Cauchy se utilizează două formule, una explicită, cealaltă implicită:

$$y_k = y_{k-2} + h \sum_{j=0}^2 \beta_j f_{k-j}$$

$$y_k = y_{k-2} + h \sum_{j=0}^2 \beta_j f_{k+1-j}$$

- Determinați coeficienții β în cele două formule astfel încât acestea să aibă valabilitate maximă.
- Definiți cu cele două formule o metodă predictor-corector.
- Scrieți o funcție Matlab care implementează metoda predictor-corector.

5. Calculați coeficienții metodelor explicite și implicite Adams-Bashforth de ordin 3. Stabiliți gradul de valabilitate al fiecăreia.

$$6. \text{ Pentru rezolvarea problemei Cauchy se folosește relația: } y_{k+1} = y_{k-2} + h \sum_{j=0}^2 \beta_j f_{k-j}.$$

Determinați β_j , $j=0:2$ astfel încât formula să aibă gradul de valabilitate cât mai ridicat posibil. Care este acesta? Este formula puternic sau slab convergentă.

7. Pentru integrarea problemei diferențiale Cauchy se folosește mai întâi o metodă cu pași separați de ordinul 2, a cărei soluții reprezintă aproximații inițiale pentru o metodă multipas explicită Adams-Bashforth de ordin 3.

a) Stabiliți formulele care definesc metoda tangentei ameliorate:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{K_1 + K_2}{2}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \mathbf{h} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) \\ \mathbf{K}_2 &= \mathbf{h} \cdot \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_i + \frac{\mathbf{h}}{2}, \mathbf{y}_i + \frac{\mathbf{K}_1}{2}\right) \end{aligned}$$

- b) Stabiliți coeficienții metodei Adams-Bashforth de ordin 3
c) Scrieți două funcții Matlab pentru implementarea celor două formule. Se dau: $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{a}, \mathbf{n}, \mathbf{f}$.

- 8.a) Calculați coeficienții formulelor explicite și implicite de tip Adams-Bashforth, de ordin 2
b) Definiți cu cele două formule o metodă predictor-corector.
c) Scrieți o funcție Matlab care implementează metoda predictor-corector

Valori proprii, vectori proprii.

1. Calculați valorile proprii și vectorii proprii ai unei matrice elementare de rotație Givens.

2. Fie matricea:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{c} \\ \mathbf{c} & \mathbf{b} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & & & \mathbf{c} \\ & 1 & & \\ & & \mathbf{O} & \\ & & & 1 \\ \mathbf{c} & & & \mathbf{b} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Calculați valorile proprii și vectorii proprii ai matricelor $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$.

3. a) Fie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Determinați $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, astfel încât $\mathbf{y}^T \mathbf{x} = 1$.
b) Fie $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, cu $\lambda(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ și vectorii proprii $\mathbf{x}_i$, $i=1:n$. Se formează matricea $\mathbf{B} = \mathbf{A}(\mathbf{I}_n - \mathbf{x}_1 \mathbf{y}^T)$ cu $\mathbf{y}^T \mathbf{x}_1 = 1$. Să se arate că matricea $\mathbf{B}$ are spectrul $\lambda(\mathbf{B}) = \{0, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ și vectorii proprii $\mathbf{z}_k$, $k=1:n$, cu $\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_1$ și $\mathbf{z}_k = \mathbf{x}_k - \frac{\lambda_1}{\lambda_k} (\mathbf{y}^T \mathbf{x}_k) \mathbf{x}_1$, $k=2:n$.
c) Scrieți o funcție Matlab care calculează valorile proprii și vectorii proprii prin metoda directă a puterii, presupunând că valorile proprii sunt reale și distincte.
Indicație: Se alege $\mathbf{y}$ coliniar cu $\mathbf{x}$. Se formează apoi $\mathbf{Bx}_1$, $\mathbf{Bx}_k$ și $\mathbf{Bz}_k$.

4. a) Arătați că valorile proprii ale matricei $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & K & 0 \\ 1 & -2 & 1 & K & 0 \\ K & K & K & K & K \\ 0 & 0 & K & 1 & -2 \end{bmatrix}$ sunt de forma:

$$\mathbf{x}_k^T = \left[\sin \frac{\pi k}{n+1} \quad \sin \frac{2\pi k}{n+1} \quad \Lambda \quad \sin \frac{n\pi k}{n+1} \right]. \text{ Calculați și valorile proprii.}$$

- b) Folosind rezultatele precedente calculați valorile proprii și vectorii proprii ai matricei:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & K & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & K & 0 \\ K & K & K & K & K \\ 0 & 0 & K & \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

5. Să se calculeze valorile proprii și vectorii proprii ai matricei

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & K & n \\ n & 1 & 2 & K & n-1 \\ n-1 & n & 1 & K & n-2 \\ K & K & K & K & K \\ 2 & 3 & 4 & K & 1 \end{bmatrix}, \quad a_{ij} = \begin{cases} n+j-i+1, & j < i \\ j-i+1, & j \geq i \end{cases}$$

Indicație: Se caută vectorii proprii de forma $\mathbf{x}_i^T = [1 \quad \mathbf{q}^k \quad \dots \quad \mathbf{q}^{k_{n-1}}]$ cu $\mathbf{q}_k = e^{\frac{2\pi k}{n}i}$, $k=0:n-1$.
Valoarea proprie λ_k se obține din $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_k = \lambda_k \mathbf{x}_k$.

6. Fie matricea: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & K & -a_{n-1} & -a_n \\ & & \mathbf{I}_{n-1} & & 0 \end{bmatrix}$

- Calculați polinomul caracteristic.
- Presupunând rădăcinile polinomului caracteristic cunoscute, să se calculeze vectorii proprii ai matricelor $\mathbf{A}$ și $\mathbf{A}^T$.

7. Să se calculeze valorile proprii și vectorii proprii ai matricei:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} n & n & 0 & K & 0 \\ 0 & n-1 & n & K & 0 \\ K & K & 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 & 2 & n \\ 0 & 0 & 0 & K & 1 \end{bmatrix}$$

8. Fie matricea tridiagonală:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & K & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & K & 0 \\ K & K & K & 0 & K \\ 0 & 0 & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & K & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}. \text{ Se construiește șirul de polinoame:}$$

$$\begin{cases} p_0(\lambda) = 1 \\ p_1(\lambda) = \lambda - a_{11} \\ K \\ p_n(\lambda) = (\lambda - a_{nn}) \cdot p_{n-1}(\lambda) - a_{n,n-1} \cdot a_{n-1,n} \cdot p_{n-2}(\lambda) \end{cases}$$

- Să se arate că $p_n(\lambda)$ este polinomul caracteristic al matricei $\mathbf{A}$.
- Să se calculeze vectorii proprii ai matricei $\mathbf{A}$.
- Scrieți o funcție Matlab care calculează polinomul caracteristic și valorile proprii ale matricei.
Indicație: Înmulțirea a două polinoame se face cu funcția $\mathbf{p} = \text{conv}(\mathbf{p1}, \mathbf{p2})$, iar rădăcinile $\mathbf{x}$ ale polinomului $\mathbf{p}$ se calculează cu $\mathbf{x} = \text{roots}(\mathbf{p})$.

9. Calculați forma Schur reală pentru matricele: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

10. Discutați în raport cu parametrii reali α și β rezultatul aplicării metodei puterii matricei

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

11. Scrieți o funcție Matlab care calculează forma Schur reală a unei matrice $\mathbf{A}$. Presupunem cunoscută o funcție care calculează un vector propriu al matricei $\mathbf{A}$, având semnătura: **function** $\mathbf{x}=\mathbf{vp}(\mathbf{A})$.

12. Se consideră matricele $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ și $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ și matricele patrute $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{AB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ și

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{BA} \end{bmatrix}. \text{ Arătați că cele două matrice sunt asemenea.}$$

Indicație: Matricea de transformare este: $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}$.

13. Se consideră date o matrice oarecare $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ și o matrice $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times k}$ cu coloanele ortogonale. Arătați că funcția $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{k \times k} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definită de $\mathbf{f}(\mathbf{X}) = \|\mathbf{AU} - \mathbf{UX}\|_{\mathbb{F}}$, admite un minim care se atinge pentru $\mathbf{X} = \mathbf{U}^T \mathbf{AU}$.

14. Stabiliți relațiile dintre valorile proprii și vectorii proprii ai unei matrice *complexe* $\mathbf{C} = \mathbf{A} + i\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ și valorile și vectorii proprii ai matricei *reale*

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}.$$

15. Fie matricea $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ cu valorile proprii distincte și o matrice $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ care comută cu $\mathbf{A}$, i.e. $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Arătați că dacă $\mathbf{S} = \mathbf{Q}^H \mathbf{A} \mathbf{Q}$ este descompunerea Schur a lui $\mathbf{A}$, atunci $\mathbf{T} = \mathbf{Q}^H \mathbf{B} \mathbf{Q}$ este descompunerea Schur a lui $\mathbf{B}$.

16. Fie o matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ factorizabilă LU. Considerăm, de exemplu, factorizarea Crout $\mathbf{A}=\mathbf{LU}$ a lui $\mathbf{A}$ și formăm matricea $\mathbf{B}=\mathbf{UL}$. Să se arate că matricele $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$ au aceleași valori proprii. Ce relație există între valorile proprii ale matricei $\mathbf{A}$ și cele ale matricei $\mathbf{C}=\mathbf{UAL}$?

17. Elaborați un algoritm pentru calculul valorilor și vectorilor proprii ai matricei $\mathbf{A} = \mathbf{I}_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$, unde $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ sunt vectori nenuli dați.

Indicație. Folosind ca matrice de transformare reflectorul $\mathbf{U}_1$ care anulează componentele $2:n$ ale vectorului $\mathbf{u}$, se arată că $\lambda_1 = 1 + \mathbf{v}^T \mathbf{u}$, celelalte $n-1$ valori proprii fiind egale cu 1.

18. Calculați valorile proprii și vectorii proprii ale unui reflector Householder.

19. Fie matricea 3-diagonală:
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{c}_1 & & & \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{c}_2 & & \\ & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \\ & & \mathbf{b}_{n-1} & \mathbf{a}_{n-1} & \mathbf{c}_{n-1} \\ & & & \mathbf{b}_n & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}.$$

Se construiește șirul de polinoame:

$$p_0(\lambda) = 1$$

$$p_1(\lambda) = \lambda - a_1$$

$$p_n(\lambda) = (\lambda - a_n)p_{n-1}(\lambda) - b_n c_{n-1} p_{n-2}(\lambda).$$

- Arătați că $p_n(\lambda)$ este polinomul caracteristic al matricei $\mathbf{A}$.
- Calculați vectorii proprii ai matricei $\mathbf{A}$.
- Scrieți o funcție Matlab care calculează valorile proprii și vectorii proprii ai matricei $\mathbf{A}$.

20. Fie $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ o matrice simplă (având un set de n vectori proprii liniar independenți $\mathbf{x}_i$, $i=1:n$). Dacă $\mathbf{y}_i$ sunt vectorii proprii ai matricei $\mathbf{A}^H$, atunci $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i^H$.

21. Fie $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ cu $\lambda(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ și vectorii proprii $\mathbf{x}_i$, $i=1:n$. Se

formează vectorul: $\mathbf{y}^T = \frac{1}{\lambda_1 \mathbf{x}_{1i}} [\mathbf{a}_{i1} \ \mathbf{a}_{i2} \ \dots \ \mathbf{a}_{in}]$.

Arătați că matricea $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{y}^T$ are spectrul $\lambda(\mathbf{B}) = \{0, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ și vectorii proprii

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1 \frac{\mathbf{x}_{ii}}{\mathbf{x}_{1i}}, \quad i = 2:n, \quad \mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_1.$$

Indicație: Se formează produsele scalare $\mathbf{y}_1^T \mathbf{x}_1$, $\mathbf{y}_i^T \mathbf{x}_1$ și $\mathbf{y}_i^T \mathbf{x}_k$ și se calculează apoi $\mathbf{B}_1 \mathbf{x}_1$, $\mathbf{B}_1 \mathbf{x}_i$, $\mathbf{B}_1 \mathbf{x}_k$, $\mathbf{B}_1 \mathbf{z}_i$ și $\mathbf{B}_1 \mathbf{z}_k$.

22. Fie matricea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} c & & & -s \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \\ s & & & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad c^2 + s^2 = 1.$$

Calculați valorile proprii și vectorii proprii ai matricelor $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$.

23. Se consideră $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}^2 \mathbf{T}$, $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Să se exprime valorile proprii ale matricei $\mathbf{B}$ în funcție de cele ale matricei $\mathbf{A}$.

24. Calculați valorile proprii și vectorii proprii ai matricei:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \Lambda & \Lambda & a_n \\ 1 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Lambda & 0 & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & \Lambda & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$25. \text{ Fie } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

- Calculați valorile proprii și vectorii proprii normați în normă 2.
- Calculați aproximația vectorului propriu corespunzător valorii proprii dominante, efectuând două iterații în metoda directă a puterii, pornind cu $\mathbf{y}^{(0)} = [1 \ 1]^T$ și comparați cu valoarea exactă calculată la pctul a).

26. Fie $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, cu $\lambda(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ și vectorii proprii $\mathbf{x}_i$, $i=1:n$. Se formează matricea $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \lambda_1 \frac{\mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1^T}{\mathbf{y}_1^T \mathbf{x}_1}$, în care $\mathbf{x}_1$ și $\mathbf{y}_1$ reprezintă vectorii proprii ai matricelor $\mathbf{A}$ și $\mathbf{A}^T$, corespunzători aceleași valori proprii dominante λ_1 .

a) Să se arate că matricea $\mathbf{B}$ are același spectru ca și $\mathbf{A}$, exceptând valoarea proprie λ_1 , care se anulează, adică $\lambda(\mathbf{B}) = \{0, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ iar vectorii proprii ai matricei $\mathbf{B}$ sunt $\mathbf{z}_k$, $k=1:n$,

unde $\mathbf{z}_k = \mathbf{x}_k - \frac{\lambda_1}{\lambda_k} \cdot (\mathbf{y}^T \mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{x}_1$, $k \neq 1$, și $\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_1$.

b) Scrieți o funcție Matlab care calculează valorile proprii și vectorii proprii prin metoda directă a puterii, presupunând că valorile proprii sunt reale și distincte.

Indicație: Se formează $\mathbf{B}\mathbf{x}_1$, $\mathbf{B}\mathbf{x}_k$, $\mathbf{B}\mathbf{z}_1$ și $\mathbf{B}\mathbf{z}_k$.

27. Pentru matricea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, cu $\lambda(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ și vectorii proprii $\mathbf{x}_i$, $i=1:n$

a) Să se arate că $\mathbf{A}$ și $\mathbf{A}^T$ au aceleași valori proprii

b) Arătați că vectorii proprii $\mathbf{x}_i$ și $\mathbf{y}_j$ corespunzători la două valori proprii distincte ale lui $\mathbf{A}$ și $\mathbf{A}^T$ sunt ortogonali, adică $\mathbf{x}_i^T \mathbf{y}_j = 0$.

c) Fie $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \lambda_i \frac{\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{y}_i^T}{\mathbf{y}_i^T \cdot \mathbf{x}_i}$. Calculați $\lambda(\mathbf{B})$ și $\mathbf{x}_i(\mathbf{B})$

28. Se consideră o matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

a) Dezvoltați relațiile necesare aducerii la formă superior Hessenberg, prin asemănare ortogonală, utilizând reflectori Householder.

b) Scrieți o funcție Matlab care implementează aceste relații.

29. Se consideră o matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

a) Dezvoltați relațiile necesare aducerii la formă superior Hessenberg, prin asemănare ortogonală, utilizând rotatori Givens.

b) Scrieți o funcție Matlab care aduce implementează aceste relații.

30. Se consideră o matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ superior Hessenberg, având valori proprii reale.

a) Dezvoltați procedeul iterativ de aducere a a matricei la formă canonică Schur reală, folosind algoritmul QR cu pas simplu.

b) Scrieți o funcție Matlab care aduce implementează aceste relații.

31. Se consideră o matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ superior Hessenberg.

a) Dezvoltați procedeul iterativ de aducere a a matricei la formă canonică Schur reală, folosind algoritmul QR cu pas dublu.

b) Scrieți o funcție Matlab care aduce implementează aceste relații.

Descompunerea valorilor singulare.

1. Fie matricea $\mathbf{A} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}'$ cu $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Dați descompunerea valorilor singulare ale matricei $\mathbf{A}$. Determinați rangul matricei $\mathbf{A}$.

2. Calculați valorile singulare și vectorii singulari ai unei matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

3. Determinați valorile singulare și vectorii singulari ai unei matrice ortogonale $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

4. Se consideră date matricele reale $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Fie matricea complexă $\mathbf{C} = \mathbf{A} + i\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ și matricea reală $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$. Stabiliți relațiile de legătură dintre descompunerile valorilor singulare ale matricelor $\mathbf{C}$ și $\mathbf{D}$.

5. Fie $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o matrice normală, i.e. care satisface condiția $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T$, (în particular simetrică) și $\lambda(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, cu $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. Arătați că valorile singulare ale matricei $\mathbf{A}$ sunt $\sigma_i = |\lambda_i|$, $i = 1 : n$.

6. Calculați manual descompunerile valorilor singulare pentru matricele reale

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ precum și pentru matricea complexă } \mathbf{C} = \mathbf{A} + i\mathbf{B}.$$

7. Calculați valorile singulare și vectorii singulari la dreapta și la stânga ai unei matrice elementare de rotație Givens.

8. Fie matricea:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{c} \\ \mathbf{c} & \mathbf{b} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & & & \mathbf{c} \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \\ \mathbf{c} & & & \mathbf{b} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Calculați valorile singulare și vectorii singulari ai matricelor $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$.

9. Fie matricea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & -\mathbf{s} \\ \mathbf{s} & \mathbf{c} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & & & -\mathbf{s} \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \\ \mathbf{s} & & & \mathbf{c} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{c}^2 + \mathbf{s}^2 = 1.$$

Calculați valorile singulare și vectorii singulari ai matricelor $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$.

10. Calculați valorile singulare și vectorii singulari la dreapta și la stânga pentru matricea:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 40 & 9 & 12 \\ -30 & 12 & 16 \end{bmatrix}$$

11. Calculați valorile singulare și vectorii singulari la dreapta și la stânga ai unei matrice reflector Householder

$$12. \text{ Calculați descompunerea valorilor singulare (matricele } \mathbf{U}, \mathbf{V} \text{ și } \mathbf{\Sigma}) \text{ pentru } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$