

APROXIMARE ÎN SENSUL CELOR MAI MICI PĂTRATE

Cea mai bună aproximare într-un spațiu prehilbertian. Definiție și caracterizare

Un *spațiu prehilbertian* este un dublet (F, u) în care F este un *spațiu vectorial cu scalari* în corpul $\mathbb{R}$ (sau $\mathbb{C}$), iar u un *produs scalar*, adică o aplicație: $u: F \times F \rightarrow \mathbb{R} \quad (f_1, f_2) \rightarrow \langle f_1, f_2 \rangle$ cu $f_1, f_2 \in F$, având proprietățile:

<i>linearitate</i>	$\langle f_1 + f_2, f_3 \rangle = \langle f_1, f_3 \rangle + \langle f_2, f_3 \rangle,$ $\langle c \cdot f_1, f_2 \rangle = c \cdot \langle f_1, f_2 \rangle,$
<i>comutativitate</i>	$\langle f_1, f_2 \rangle = \langle f_2, f_1 \rangle$
<i>definire pozitivă</i>	$\langle f, f \rangle \geq 0$
<i>nesingularitate</i>	$\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$

Exemple:

$$F = \mathbb{R}^3 \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

$$F = C([a, b]) \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x) \cdot w(x) dx$$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^m f(x_i) \cdot g(x_i) \cdot w(x_i)$$

Fie F un spațiu prehilbertian și $G \subseteq F$ un subspațiu al său de dimensiune finită, adică având un număr finit de elemente liniar independente.

Definim *norma unui element* $f \in F$ prin $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$

Cel mai bun aproximant în sensul celor mai mici pătrate a unui element $f \in F$ în subspațiul G este un element g cu proprietatea

$$\|f - g^*\| = \min_{g \in G} \|f - g\|$$

Teorema 1 Condiția necesară și suficientă ca $g^* \in G \subset F$ să fie cel mai bun aproximant a lui $f \in F$ este ca $\langle f - g^*, g \rangle = 0, \forall g \in G$.

Condiția este necesară; fie g^* cel mai bun aproximant al lui $f \in F$ și presupunem că există g_1 astfel încât $\langle f - g^*, g_1 \rangle = k \neq 0$. Pentru un element $g_2 = g^* + \frac{k}{\|g_1\|^2} g_1$ avem

$$\|f - g_2\|^2 = \langle f - g_2, f - g_2 \rangle = \left\langle f - g^* - \frac{k}{\|g_1\|^2} g_1, f - g^* - \frac{k}{\|g_1\|^2} g_1 \right\rangle =$$

$$\langle f - g^*, f - g^* \rangle - 2 \frac{k}{\|g_1\|^2} \langle f - g^*, g_1 \rangle + \frac{k^2}{\|g_1\|^4} \langle g_1, g_1 \rangle = \|f - g^*\|^2 - \frac{k^2}{\|g_1\|^2}$$

$\|f - g_2\| < \|f - g^*\|$, ceea ce contrazice ipoteza că g^* este cea mai bună aproximare, adică $k=0$.

Condiția este suficientă : fie $g_1 \in G$ astfel ca $\langle f - g_1, g \rangle = 0, \forall g \in G$.

$\|f - g\|^2 = \langle f - g, f - g \rangle = \langle f - g_1 - (g - g_1), f - g_1 - (g - g_1) \rangle = \|f - g_1\|^2 + \|g - g_1\|^2$ adică $\|f - g_1\| < \|f - g\|$ ceea ce implică $g_1 = g^*$.

Teorema 2 Cea mai bună aproximare în sensul celor mai mici pătrate $g^* \in G$ a lui $f \in F$ este unică.

Presupunem că există două cele mai bune aproximații g_1^* și g_2^* ale lui f , ceea ce implică:

$$\langle \mathbf{f} - \mathbf{g}_1^*, \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{f} - \mathbf{g}_2^*, \mathbf{g} \rangle = 0, \text{ pentru } \forall \mathbf{g} \in \mathbf{G} \text{ și în particular pentru } \mathbf{g} = \mathbf{g}_1^* - \mathbf{g}_2^* \quad \|\mathbf{g}_1^* - \mathbf{g}_2^*\|^2 \\ = \langle \mathbf{g}_1^* - \mathbf{f} + \mathbf{f} - \mathbf{g}_2^*, \mathbf{g} \rangle = \underbrace{\langle \mathbf{f} - \mathbf{g}_2^*, \mathbf{g} \rangle}_0 - \underbrace{\langle \mathbf{f} - \mathbf{g}_1^*, \mathbf{g} \rangle}_0 = 0, \text{ adică } \mathbf{g}_1^* = \mathbf{g}_2^*.$$

Pentru o bază, $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ din $\mathbf{G}$ (i.e. pentru un set minimal de elemente liniar independente), un element oarecare $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$ și cel mai bun aproximant se exprimă ca

$$\mathbf{g} = \sum_{k=1}^n \mathbf{c}_k \mathbf{u}_k, \quad \mathbf{g}^* = \sum_{k=1}^n \mathbf{c}_k^* \mathbf{u}_k \\ \langle \mathbf{f} - \mathbf{g}^*, \mathbf{g} \rangle = \left\langle \mathbf{f} - \mathbf{g}^*, \sum_{j=1}^n \mathbf{c}_j \mathbf{u}_j \right\rangle = \sum_{j=1}^n \mathbf{c}_j \langle \mathbf{f} - \mathbf{g}^*, \mathbf{u}_j \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{f} - \mathbf{g}^*, \mathbf{u}_j \rangle = 0, \quad j = 0 : n \\ \langle \mathbf{g}^*, \mathbf{u}_j \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_j \rangle \\ \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{c}_k^* \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_j \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_j \rangle \\ \sum_{k=1}^n \mathbf{c}_k \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_j \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_j \rangle, \quad j = 1 : n$$

Sistemul poartă numele de *sistem normal*

Sistemul normal este simetric (produsele scalare fiind comutative, în general) și rău condiționat. Determinantul sistemului poartă numele de *determinant Gram*.

$$\begin{cases} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle \cdot \mathbf{c}_1 + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle \cdot \mathbf{c}_2 + \dots + \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_1 \rangle \cdot \mathbf{c}_n = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle \cdot \mathbf{c}_1 + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle \cdot \mathbf{c}_2 + \dots + \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_2 \rangle \cdot \mathbf{c}_n = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_2 \rangle \\ \dots \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_n \rangle \cdot \mathbf{c}_1 + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_n \rangle \cdot \mathbf{c}_2 + \dots + \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n \rangle \cdot \mathbf{c}_n = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_n \rangle \end{cases}$$

Sistemul normal este simetric (produsele scalare fiind comutative, în general) și rău condiționat. Determinantul sistemului poartă numele de *determinant Gram*.

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle \end{vmatrix}$$

Intrucât rezolvarea directă a sistemului prezintă dificultăți, se preferă aducerea la forme particulare; astfel pentru o bază ortonormată sistemul normal devine diagonal. Componentele bazei $\mathbf{c}_k^*$, în acest caz, se numesc *coeficienți Fourier* și au forma

$$\mathbf{c}_k^* = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_k \rangle, \quad k=0 : n.$$

Calitatea aproximării se evaluează prin distanța

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{g}^*\|^2 = \langle \mathbf{f} - \mathbf{g}^*, \mathbf{f} - \mathbf{g}^* \rangle = \langle \mathbf{f} - \mathbf{g}^*, \mathbf{f} \rangle - \underbrace{\langle \mathbf{f} - \mathbf{g}^*, \mathbf{g}^* \rangle}_0 = \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle - \langle \mathbf{g}^*, \mathbf{f} \rangle \\ \|\mathbf{f} - \mathbf{g}^*\|^2 = \|\mathbf{f}\|^2 - \sum_{k=1}^n \mathbf{c}_k^* \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_k \rangle$$

Pentru o bază ortonormată se obține forma simplificată

$$\|f - g^*\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^{*2}$$

Aproximarea continuă în sensul cmm

În aproximarea continuă în sensul celor mai mici pătrate se alege produsul scalar de forma

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x) \cdot f(x) \cdot g(x) dx$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b w(x) \cdot f^2(x) dx}$$

unde $w(x) > 0$ este o funcție de ponderare, definită pe (a, b) aleasă adecvat scopurilor aproximării.

Aproximarea continuă în sensul celor mai mici pătrate $g^*(x)$ a lui $f(x)$ pe $C([a, b])$ este definită prin

$$\underbrace{\int_a^b w(x) \cdot [f(x) - g^*(x)]^2 dx}_{E'} = \min_{g \in G} \underbrace{\int_a^b w(x) \cdot [f(x) - g(x)]^2 dx}_E$$

Considerând o bază $u = \{u_0, \dots, u_n\}$ pentru G și scriind $g = \sum_{k=0}^n c_k u_k$ minimul este obținut

pentru

$$\frac{\partial E}{\partial c_i} = 0 \quad \text{cu } i = 0 : n$$

Aceste ecuații sunt echivalente cu cele obținute din teorema de caracterizare. Concret, trebuie satisfăcută condiția de ortogonalitate

$$\int_a^b w(x) \cdot [f(x) - g^*(x)] \cdot g(x) dx = 0$$

$$\sum_{k=1}^n c_k^* \int_a^b w(x) \cdot u_k(x) \cdot u_j(x) dx = \int_a^b w(x) \cdot f(x) \cdot u_j(x) dx, \quad j = 1 : n$$

Alegem baza polinomială, cu $\dim G = n+1$, și notăm pentru comoditate indicii începând de la 0

$$u_0(x) = 1, \quad u_1(x) = x, \dots, \quad u_n(x) = x^n,$$

Sistemul normal obținut pentru aproximarea continuă în sensul celor mai mici pătrate este

$$\sum_{k=0}^n c_k^* \int_a^b w(x) \cdot x^{k+j} dx = \int_a^b w(x) \cdot f(x) \cdot x^j dx, \quad j = 0 : n$$

Baza polinomială nu este ortonormată; sistemul normal, pentru $w(x) = 1$ este un sistem Hilbert, foarte rău condiționat.

Pornind de la o bază oarecare $u_0, u_1, \dots, u_n$ se poate trece la o bază ortonormată

$v_0, v_1, \dots, v_n$, folosind *algoritmul de ortogonalizare Gram-Schmidt*

$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{w}_0}{\|\mathbf{w}_0\|_2}$$

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1 - \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_0 \rangle \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|_2}$$

$$\mathbf{w}_m = \mathbf{u}_m - \sum_{p=0}^{m-1} \langle \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_p \rangle \mathbf{v}_p, \quad \mathbf{v}_m = \frac{\mathbf{w}_m}{\|\mathbf{w}_m\|_2}$$

Pentru $\mathbf{F}=\mathbf{R}^n$, cu produsul scalar $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^n \mathbf{x}_k \mathbf{y}_k = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$ implementarea algoritmului de ortogonalizare este:

```
function V = Orto_Schmidt(U)
% Intrări:
% U- o bază oarecare (dată prin n vectori)
% Ieșiri:
% V - baza ortonormată corespunzătoare
[m,n]=size(U);
W=zeros(n);
for m = 1 : n
    W(:,m) = U(:,m);
    for j = 1 : m-1
        c = U'(:,m)*V(:,j);
        W(:,m) = W(:,m) - c*V(:,j);
    end;
    V(:,m) = W(:,m) / norm(W(:,m));
end
```

Aproximare continuă trigonometrică în sens ccmp

Spațiul $\mathbf{G}$ este generat de cele $2n+1$ componente ale bazei trigonometric

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\mathbf{x}) \cos(\mathbf{x}) \cdots \sin(n\mathbf{x}) \cos(n\mathbf{x})$$

relațiile de ortogonalitate sunt:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{u}_q(\mathbf{x}) \mathbf{u}_r(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \delta_{qr} = \begin{cases} 0, & q \neq r \\ 1, & q = r \end{cases}$$

pentru orice funcție $\mathbf{f} \in \mathbf{C}([-1,1])$

$$\langle \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0 \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} d\mathbf{x} = 1$$

$$\langle \mathbf{u}_{2q-1}, \mathbf{u}_{2q-1} \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 q\mathbf{x} d\mathbf{x} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2q\mathbf{x}) d\mathbf{x} =$$

$$1 - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin 2q\mathbf{x}}{2q} \Big|_0^{2\pi} = 1$$

$$\langle u_{2q}, u_{2q} \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 qx \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2qx) dx = 1 + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin 2qx}{2q} \Big|_0^{2\pi} = 1$$

$$\langle u_0, u_{2q-1} \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin qx \, dx = 0$$

$$\langle u_0, u_{2q} \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos qx \, dx = 0$$

$$\langle u_{2q-1}, u_{2r-1} \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin qx \sin rx \, dx = 0$$

$$\langle u_{2q}, u_{2r} \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos qx \cdot \cos rx \, dx = 0$$

$$\langle u_{2q-1}, u_{2r} \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin qx \cdot \cos rx \, dx = 0$$

Sistemul normal devine diagonal și:

$$a_0 = \langle f, u_0 \rangle = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin x \, dx \quad a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos x \, dx$$

$$b_p = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin px \, dx \quad a_p = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos px \, dx$$

$$g^* = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{p=1}^n (a_p \cos px + b_p \sin px)$$

Aproximare continuă Cebâșev în sensul c.m.p.

Spațiul G este generat de cele $n+1$ componente ale bazei Cebâșev

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, T_1(x), \dots, T_n(x)$$

Baza este ortogonală în raport cu produsul scalar:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_q(x) \cdot T_r(x) \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & q \neq r, \\ \frac{\pi}{2} & q = r \neq 0, \\ \pi & q = r = 0. \end{cases}$$

$$p_n^*(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + a_1 T_1(x) + \dots + a_n T_n(x)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$a_p = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) \cdot T_p(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

Aproximare discretă în sensul cmmmp.

În aproximarea discretă în sensul celor mai mici pătrate, funcția $f \in F = C([a, b])$ este cunoscută pe un suport finit dat de punctele $x_0, x_1, \dots, x_m$ prin valorile ei $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_m)$ și se dorește a fi aproximată optimal în sensul celor mai mici pătrate printr-o funcție $g \in G \subset F$, cunoscută prin valorile sale $g(x_0), g(x_1), \dots, g(x_m)$ în aceleași puncte.

Subspațiul G de dimensiune $n+1$, este generat de elementele liniar independente

$u(x_0), u(x_1), \dots, u(x_n)$ din F .

Ținând seama de faptul că funcțiile f și g se cunosc numai în punctele $x_0, x_1, \dots, x_m$, produsul scalar și norma vor fi definite pe spațiul vectorilor valorilor funcțiilor din $C([a, b])$ în punctele menționate prin

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^m w(x_i) f(x_i) g(x_i)$$

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{i=0}^n w(x_i) \cdot f^2(x_i)}$$

Problema aproximării discrete în sensul celor mai mici pătrate este de a găsi funcția

$$g^*(x) = \sum_{k=0}^n c_k^* u_k(x) \text{ adică coeficienții } c_k^*, k=0 : n \text{ astfel încât:}$$

$$\|f(x) - g^*(x)\| = \min_{g \in G} \|f(x) - g(x)\|$$

În aceste condiții aproximarea discretă în sensul celor mai mici pătrate există și este unică.

Un sistem de funcții ortonormate discret satisface condițiile

$$\sum_{i=0}^n w(x_i) u_j(x_i) u_k(x_i) = 0, \text{ pentru } j \neq k, j, k = 0 : n,$$

$$\sum_{i=0}^n w(x_i) u_j^2(x_i) = 1$$

$$\text{Teorema de caracterizare } \sum_{i=0}^p w(x_i) \cdot [f(x_i) - g^*(x_i)] \cdot g(x_i) = 0$$

conduce la sistemul normal

$$\sum_{k=0}^n c_k^* \sum_{i=0}^p w(x_i) \cdot u_k(x_i) \cdot u_j(x_i) = \sum_{i=0}^p w(x_i) \cdot f(x_i) \cdot u_j(x_i), \quad j = 0 : n$$

Pentru un sistem de ecuații normale diagonal coeficienții Fourier sunt

$$c_k^* = \sum_{i=0}^p w(x_i) f(x_i) u_k(x_i), \quad k = 0 : n$$

iar calitatea aproximării este dată de

$$\sum_{i=0}^p w(x_i) \cdot \left[f(x_i) - \sum_{k=0}^n c_k^* u_k(x_i) \right]^2 = \sum_{i=0}^p w(x_i) \cdot f^2(x_i) - \sum_{k=0}^n c_k^{*2}$$

Sistemul normal obținut folosind baza polinomială are forma

$$\sum_{k=0}^n c_k^* \sum_{i=0}^n w(x_i) x_i^{k+j} = \sum_{i=0}^n w(x_i) f(x_i) x_i^j, \quad j = 0 : n$$

Aproximare discretă trigonometrică în sens cmmmp.

Baza $\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin(x), \cos(x), \dots, \sin nx, \cos nx$
este ortogonală în raport cu produsul scalar discret

$$\sum_{k=1}^{2n+2} u_q(x_k) \cdot u_r(x_k) = \begin{cases} 0, & q \neq r \\ n+1, & q = r \end{cases} \quad q, r = 1 : 2n+2$$

în care suportul aproximării este constituit din punctele echidistante din intervalul $[0, 2\pi]$

$$x_k = \frac{2\pi \cdot k}{2n+2} = \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1 : 2n+2$$

Coeficienții polinomului minimal de aproximare discretă trigonometrică în sensul celor mai mici pătrate rezultă din sistemul diagonal Gram

$$a_0 = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sum_{k=1}^{2n+2} f\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

$$b_j = \left\langle f, \sin jx \right\rangle = \sum_{k=1}^{2n+2} f\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \sin \frac{k\pi}{n+1} j$$

$$a_j = \left\langle f, \cos jx \right\rangle = \sum_{k=1}^{2n+2} f\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \cos \frac{k\pi}{n+1} j, \quad j = 1 : n.$$

Aproximarea discretă Cebâșev în sensul cmmmp

Baza $\frac{1}{\sqrt{2}}, T_1(x), \dots, T_n(x)$ este ortogonală în raport cu produsul scalar discret

$$\sum_{k=0}^n u_q(x_k) u_r(x_k) = \begin{cases} 0, & q \neq r \\ \frac{n+1}{2}, & q = r \end{cases} \quad q, r = 0 : n$$

Punctele x_k de pe suportul evaluării produsului scalar sunt rădăcinile polinomului $T_{n+1}(x_k) = 0$,

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = 0 : n$$

Facem substituția

$$x = \cos \theta \Rightarrow \theta_k = \frac{2k+1}{2n+2} \pi$$

$$\sum_{k=0}^n T_q(x_k) T_r(x_k) = \sum_{k=0}^n \cos q\theta_k \cos r\theta_k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n [\cos (q+r)\theta_k + \cos (q-r)\theta_k]$$

$$p(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + a_1 T_1(x) + \dots + a_n T_n(x)$$

$$\frac{n+1}{2} a_0 = \langle f, u_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^n f_k, \quad a_0 = \frac{\sqrt{2}}{n+1} \sum_{k=0}^n f_k$$

$$\frac{n+1}{2} a_j = \langle f, u_j \rangle = \sum_{k=0}^n f_k T_j(x_k), \quad a_j = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n f_k T_j(x_k)$$

Polinoame ortogonale

Un șir de funcții $\{p_i(\mathbf{x})\}_{i \in \mathbb{N}}$ este *ortonormat*, dacă

$$\langle p_i, p_j \rangle = 0, \quad i \neq j$$

$$\|p_i\|_2 = 1$$

Dacă șirul $\{u_i\}$ este liniar independent, atunci există un șir ortonormat $\{v_i\}$ format din combinații liniare de elemente ale lui $\{u_i\}$ astfel încât subspațiul liniar generat de $u_0, u_1, \dots, u_i$ coincide cu subspațiul liniar generat de $v_0, v_1, \dots, v_i$.

Înlocuind șirul $\{u_i\}$ prin șirul de polinoame $1, \mathbf{x}, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$ se obține un șir de polinoame ortogonale corespunzător șirului $\{w_i\}$ $p_0, p_1, \dots, p_n$

$$p_0 = 1$$

$$p_i = \mathbf{x}^i - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\langle \mathbf{x}^i, p_j \rangle}{\|p_j\|^2} p_j$$

O familie de polinoame ortogonale se definește în mod unic în raport cu un interval $[a, b]$ și o funcție pondere $w(\mathbf{x})$.

Anumite produse scalare satisfac *relația de simetrie* $\langle \mathbf{x}f, g \rangle = \langle f, \mathbf{x}g \rangle$ situație în care:

$$p_0(\mathbf{x}) = 1, \quad p_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \alpha_0$$

$$p_{k+1}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \alpha_k) p_k(\mathbf{x}) - \beta_k p_{k-1}(\mathbf{x}), \quad k = 1 : n-1$$

$$\alpha_k = \frac{\langle \mathbf{x} p_k, p_k \rangle}{\|p_k\|^2}, \quad k = 0 : n-1,$$

$$\beta_k = \frac{\|p_k\|^2}{\|p_{k-1}\|^2}, \quad k = 1 : n-1.$$

Pentru un polinom ortonormat

$$p_n(\mathbf{x}) = a_{nn} \mathbf{x}^n + a_{n-1,n} \mathbf{x}^{n-1} + a_{0n}$$

avem relația de recurență

$$\frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}} \cdot p_{n+1}(\mathbf{x}) + \left(\frac{a_{n-1,n}}{a_{n,n}} - \frac{a_{n,n+1}}{a_{n+1,n+1}} - \mathbf{x} \right) \cdot p_n(\mathbf{x}) + \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{n,n}} \cdot p_{n-1}(\mathbf{x}) = 0$$

dacă polinomul este numai ortogonal, fără a fi ortonormat, atunci relația de recurență este

$$\frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}} \cdot p_{n+1}(\mathbf{x}) + \left(\frac{a_{n-1,n}}{a_{n,n}} - \frac{a_{n,n+1}}{a_{n+1,n+1}} - \mathbf{x} \right) \cdot p_n(\mathbf{x}) + \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{n,n}} \cdot \frac{\|p_n\|^2}{\|p_{n-1}\|^2} p_{n-1}(\mathbf{x}) = 0$$

Polinoamele ortogonale mai des utilizate *Cebâșev, Legendre, Laguerre* și *Hermite*

Cebâșev	$T_{n+1} - 2\mathbf{x}T_n + T_{n-1} = 0,$	$T_0 = 1, \quad T_1 = \mathbf{x}$
Legendre	$(n+1)L_{n+1} - (2n+1)\mathbf{x}L_n + nL_{n-1} = 0,$	$L_0 = 1, \quad L_1 = \mathbf{x}$
Laguerre	$G_{n+1} - (2n+1-\mathbf{x})G_n + n^2G_{n-1} = 0,$	$G_0 = 1, \quad G_1 = 1-\mathbf{x}$
Hermite	$H_{n+1} - 2\mathbf{x}H_n + 2nH_{n-1} = 0,$	$H_0 = 1, \quad H_1 = 2\mathbf{x}$

```

function z=Leg(n)
% calcul coeficienti polinom Legendre de grad n
y=[1 0]; %L1(x)=x
if n==0
    z=x;
elseif n==1
    x=1; %L0(x)=1
    z=y;
else
    for k=2:n
        z=[(2*k-1)/k*y 0]-[0 0 (k-1)/k*x];
        x=y;
        y=z;
    end
end
end

```

Proprietăți polinoame ortogonale

1. un polinom ortogonal are rădăcini reale, distincte situate în intervalul $[a, b]$

2. un polinom ortogonal prezintă proprietatea de ortogonalitate în raport cu orice polinom (neortogonal) cu grad mai mic decât el

$\langle p_n, q_k \rangle = 0$, $k=0:n-1$, în particular $q_k = x^k$, unde produsul scalar, prin ponderea w și intervalul $[a, b]$ individualizează un anumit polinom ortogonal.

$$0 = \langle p_n, p_k \rangle = \left\langle p_n, \sum_{j=0}^k a_j x^j \right\rangle = \sum_{j=0}^k a_j \langle p_n, x^j \rangle \text{ de unde } \langle p_n, x^j \rangle = 0 \text{ și}$$

$$\left\langle p_n, \sum_{j=0}^k c_j x^j \right\rangle = \langle p_n, q_k \rangle = 0$$

3. rădăcinile polinomului $p_n(x)$ determină intervale de separare pentru rădăcinile polinomului $p_{n-1}(x)$

Dacă $x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{nn}$ sunt rădăcinile lui $p_n(x)$ și $x_{1,n-1}, x_{2,n-1}, \dots, x_{n-1,n-1}$ - rădăcinile lui $p_{n-1}(x)$, ambele ordonate crescător, atunci

$$\begin{aligned}
 x_{1n} &< x_{1,n-1}, \\
 x_{nn} &> x_{n-1,n-1}, \\
 x_{i-1,n-1} &< x_{i,n} < x_{i-1,n}, \quad 1 < i < n.
 \end{aligned}$$

adică rădăcinile lui $p_n(x)$ se află între rădăcinile lui $p_{n-1}(x)$ pe care le folosesc ca intervale de separare.

Capătul stâng α al intervalului de separare a primei rădăcini $\alpha < x_{1,n} < x_{1,n-1}$, și capătul drept β al intervalului de separare a ultimei rădăcini $x_{n-1,n-1} < x_{n,n} < \beta$ se determină impunând variația semnelui polinomului la capetele intervalului de separare a rădăcinii

$$\begin{aligned}
 p_n(x_{1,n-1}) \cdot p_n(\alpha) &< 0, \\
 p_n(x_{n-1,n-1}) \cdot p_n(\beta) &< 0.
 \end{aligned}$$

O rădăcină separată într-un interval poate fi localizată prin bisecție (înjumătățirea intervalului).

```

function x = Radacini(n, 'f', x)
% Intrări: n = gradul polinomului ortogonal
%f=funcția pt calcul polinom ortogonal

```

```

%x=vectorul celor n rădăcini ale polinomului
%x(1) conține inițial rădăcina polinomului de grad 1
for k = 2 : n
    x(0) = x(1) -h;
    while feval(f,x(1))*feval(f,x(0)) >0
        x(0) = x(0) - h;
    end;
    x(k) = x(k-1) +h;
    while feval(f,x(k-1))*feval(f,x(k)) >0
        x(k) = x(k) + h;
    end
    for i = 1 : k
        a = x(i-1);
        b = x(i);
        do
            y(i) = (a+b)/2;
            if feval(f,a)*feval(f,y(i))> 0
                a = y(i);
            else
                b = y(i);
            end
            while abs(feval(f,y(i)))<e or b-a<e;
        end
    end
    for i = 1 : k
        x(i) = y(i);
    end
end

```

4. minimul integralei $\min_{q_n \in \Pi_n} \int_a^b w(x) q_n^2(x) dx$ este realizat de către polinomul ortogonal $p_n(x)$, definit în mod unic de ponderea $w(x)$ și de intervalul $[a, b]$

Descompunem polinomul $q_n(x)$ după baza reprezentată de polinoamele ortogonale

$p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$

$q_n(x) = p_n(x) + \alpha_{n-1} p_{n-1}(x) + \dots + \alpha_0 p_0(x)$

$$\int_a^b w(x) q_n^2(x) dx = \int_a^b w(x) p_n^2(x) dx + \sum_{i=0}^{n-1} \int_a^b w(x) \alpha_i^2 p_i^2(x) dx$$

Termenii de forma $\int_a^b 2w(x) \alpha_i \alpha_j p_i(x) p_j(x) dx$ dispar, datorită ortogonalității. Se

observă că minimul integralei se obține pentru toți $\alpha_i = 0$, ceea ce conduce la $q_n(x) = p_n(x)$

Polinoamele ortogonale pot fi obținute și folosind *relația lui Rodrigues*

$$p_n(x) = \frac{K_n}{w(x)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} G_n(x)$$

în care K_n este o constantă, iar funcția $G_n(x)$, specifică unui anumit polinom ortogonal verifică condițiile

$$G_n(a) = G_n'(a) = G_n''(a) = \dots = G_n^{(n-1)}(a) = 0$$

$$G_n(b) = G_n'(b) = G_n''(b) = \dots = G_n^{(n-1)}(b) = 0$$

Pentru polinoamele ortogonale cauzuale, funcția $G_n(x)$ este:

$$\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}$$

Cebâșev ordin 1

Cebâșev ordin 2 $(1 - x^2)^n \sqrt{1 - x^2}$

Legendre $(x^2 - 1)^n$

Laguerre: $x^n e^{-x}$

Hermite: e^{-x^2}

Formula lui Rodrigues, pentru polinoamele ortogonale

Cebâșev ordin 1: $(-1)^n \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{1 - x^2}}{2^n \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \frac{d^n}{dx^n} \frac{(1 - x^2)^n}{\sqrt{1 - x^2}}$

Cebâșev ordin 2: $(-1)^n \frac{(n + 1)\sqrt{n}}{2^{n+1} \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \frac{d^n}{dx^n} (1 - x^2)^n \sqrt{1 - x^2}$

Legendre: $(-1)^n \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (1 - x^2)^n$

Laguerre: $\frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$

Hermite: $(-1)^n e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$