

APROXIMARE UNIFORMĂ

Definirea și caracterizarea celui mai bun polinom de aproximare uniformă (polinomul minimax)

Pentru orice funcție continuă pe un interval închis $f \in C([a, b])$ se definește norma aproximării uniforme prin: $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

Cel mai bun polinom de aproximare uniformă de ordin n (aproximant uniform sau polinom minimax) al unei funcții: $f \in C([a, b])$ este acel polinom $p_n^*(x) \in \Pi_n$ care se îndepărtează cel mai puțin, în sensul normei de funcția dată, adică:

$$\|f - p_n^*\| = \min_{p_n \in \Pi_n} \|f - p_n\| = \min_{p_n \in \Pi_n} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)|$$

Teorema de caracterizare: $p_n^*(x)$ este aproximant uniform de ordin n , dacă: $e(x) = f(x) - p_n^*(x)$ atinge de $n+2$ ori valoarea extremă $+E$ sau $-E$, cu alternanțe de semn între două extreme consecutive.

Aceasta presupune existența a $n+2$ puncte distincte în $[a, b]$: $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ cu proprietatea de alternanță a extremelor, adică:

$$e(x_k) = f(x_k) - p_n^*(x_k) = (-1)^k E, \quad k = 0 : n+1,$$

$$E = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n^*(x)|.$$

Cel mai bun polinom de aproximare uniformă este unic.

Dacă funcțiile $1, x, x^2, \dots, x^n, f$ sunt liniar independente și generează un spațiu vectorial V și dacă orice element din V are $n+2$ zerouri în $[a, b]$ atunci:

1. $f - p_n^*$ posedă exact $n+2$ extreme alternante
2. a și b fac parte dintre punctele extreme
3. între punctele extreme nu există alte extreme
4. $f - p_n^*$ este strict monotonă între două puncte extreme alternante consecutive.

În determinarea celui mai bun polinom de aproximare uniformă se folosesc *polinoame Cebășev*, întrucât acestea prezintă proprietatea de oscilație cerută de teorema de caracterizare.

Proprietăți ale polinoamelor Cebășev.

Polinoamele Cebășev se definesc prin relația: $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$

Dacă se introduce notația:

$$x = \cos \theta,$$

$$T_n(x) = T_n(\cos \theta) = \cos n\theta.$$

Se observă că: $x \in [-1, 1]$ și $T_n(x) \in [-1, 1]$, adică:

$$T_n : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1].$$

Polinomul $T_n(x)$ este un polinom de gradul n în x având coeficientul puterii dominante 2^{n-1} :

$$T_n(x) = 2^{n-1} \cdot x^n + K$$

Polinoamele Cebâșev se calculează cu relația de recurență:

$$T_{p+1}(x) - 2 \cdot x \cdot T_p(x) + T_{p-1}(x) = 0, \quad p = 1 : n - 1,$$

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.$$

Intr-adevăr relația de recurență se poate exprima prin relația trigonometrică evidentă:

$$\cos(p+1)\theta + \cos(p-1)\theta = 2 \cdot \cos \theta \cdot \cos p\theta$$

Zerourile polinomului Cebâșev se obțin din ecuația trigonometrică:

$$\cos n\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_k = (2 \cdot k + 1) \frac{\pi}{2n},$$

$$x_k = (2 \cdot k + 1) \frac{\pi}{2n}.$$

Punctele de extrem ale polinomului Cebâșev: $T_n(x_p) = \pm 1$ sunt:

$$x_p = \cos \frac{p\pi}{n}.$$

Relațiile de ortogonalitate satisfăcute de aceste polinoame:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_p(x) \cdot T_q(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & p \neq q, \\ \frac{\pi}{2} & p = q \neq 0, \\ \pi & p = q = 0. \end{cases}$$

se deduc din identitatea trigonometrică:

$$\cos(p\theta) \cdot \cos(q\theta) = \frac{1}{2} [\cos(p+q)\theta + \cos(p-q)\theta]$$

Dezvoltarea în serie de polinoame Cebâșev a unei funcții definite pe $[-1, 1]$ este:

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p T_p(x),$$

unde:

$$a_p = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_p(x)}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

și se obține din dezvoltarea în serie Fourier a funcției:

$$f(\cos\theta) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \cdot \cos p\theta.$$

$$a_p = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(\cos\theta) \cdot \cos p\theta d\theta,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos\theta) d\theta.$$

O funcție generatoare a polinoamelor Cebâșev este:

$$\frac{1 - tx}{1 - 2tx + t^2} = 1 + t \cdot T_1(x) + t^2 \cdot T_2(x) + K$$

Polinomul Cebâșev monic de gradul n (având coeficientul puterii maxime 1) $T_n(x)$ se obține din polinomul Cebâșev corespunzător prin împărțire cu 2^{n-1}

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$$

Relația de recurență pentru polinoame Cebâșev monice se deduce din relația corespunzătoare polinoamelor Cebâșev obișnuite:

$$\tilde{T}_{p+1}(x) - x \cdot \tilde{T}_p(x) + \frac{1}{4} \cdot \tilde{T}_{p-1}(x) = 0.$$

Polinoamele Cebâșev monice au aceleași zerouri și aceleași puncte în care prezintă extreme ca și polinoamele Cebâșev corespunzătoare. Valorile extremelor sunt însă diferite și anume:

$$\tilde{T}_n(x_p) = \frac{(-1)^p}{2^{n-1}} \cos x_p = \cos \frac{pn}{n} \text{ si } p = 0 : n.$$

Dintre polinoamele monice de ordin n definite pe $[-1, 1]$, polinomul monic Cebâșev are norma aproximării uniforme minimă și:

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \max_{x \in [-1, 1]} |\tilde{T}_n(x)| < \max_{x \in [-1, 1]} |P_n(x)| \quad \forall P_n \in \Pi_n^{\sim}$$

Presupunând că ar exista un polinom $P_n \in \Pi_n^*$ cu proprietatea:

$$\max_{x \in [-1, 1]} P_n(x) < \frac{1}{2^{n-1}},$$

atunci polinomul:

$$Q = \tilde{T}_n - P_n \in \Pi_{n-1}^{\sim}.$$

ar prezenta în punctele: $x_p = \cos pn$, $p = 0 : n$, n alternanțe de semn, adică ar avea n zerouri pe $[-1, 1]$ ceea ce este imposibil fiind un polinom de grad $n-1$.

Teorema ne permite să găsim abscisele x_0, x_1, K, x_n din $[-1, 1]$ care minimizează eroarea interpolării Lagrange

$$f(x) = P_n(x) + (x - x_0) K (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} = P_n(x) + R_{n+1}^{\sim}(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}.$$

Restul interpolării este minimizat în sensul aproximării uniforme pentru:

$$R_{n+1}^{\sim} = \tilde{T}_{n+1}, \text{ adică pentru punctele:}$$

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \cdot \pi,$$

și în acest caz avem majorarea:

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - p_n(x)| < \frac{1}{2^n \cdot (n+1)!} \cdot \max_{x \in [-1,1]} f^{(n+1)}(x),$$

Intervalul de interpolare poate fi extins la $[a, b]$ cu schimbarea de variabilă:

$$t = \frac{b-a}{2} \cdot x + \frac{b+a}{2}$$

Determinarea polinomului minimax al unei funcții date

Se face mai întâi o schimbare liniară de variabilă pentru a se trece în domeniul $[-1, 1]$:

$$x = \alpha \cdot t + \beta = \frac{2}{b-a} \cdot t - \frac{b+a}{b-a}.$$

Vom considera în cele ce urmează că funcțiile sunt definite pe $[-1, 1]$ în variabila x .

În cazul particular în care funcția f este un polinom de grad $n+1$:

$$f(x) = a_{n+1} \cdot x^{n+1} + a_n \cdot x^n + K + a_0,$$

cel mai bun polinom de aproximare uniformă de ordin n este:

$$p_n^*(x) = f(x) - \frac{a_{n+1}}{2^n} \cdot T_{n+1}(x)$$

Intr-adevăr $f(x) - p_n^*(x) = \frac{a_{n+1}}{2^n} \cdot T_{n+1}(x)$ satisface teorema de caracterizare,

prezentând $n+2$ alternanțe: $\frac{1}{2^n}$, $-\frac{1}{2^n}$, K , în punctele:

$$x_k = \cos \frac{k\pi}{n+1} \quad k = 0 : n+1.$$

În cazul general, în care f este o funcție continuă oarecare, o aproximare a polinomului minimax se determină pornind de la dezvoltarea în serie de polinoame Cebășev a funcției:

$$f(x) - p_n^*(x) = \sum_{p=0}^n c_p \cdot T_p(x) + c_{n+1} T_{n+1}(x) + \sum_{p=n+2}^{\infty} c_p T_p(x)$$

Dacă dezvoltarea în serie a lui f este rapid convergentă:

$$\sum_{p=n+2}^{\infty} c_p \cdot T_p(x) \approx 0,$$

atunci, dacă se ia pentru polinomul minimax dezvoltarea limitată:

$$p_n^*(x) = \sum_{p=0}^n c_p \cdot T_p(x) = \sum_{p=0}^n a_p \cdot x^p.$$

se constată că diferența $f(x) - p_n^*(x)$ prezintă proprietatea de oscilație din teorema de caracterizare

Dezvoltarea limitată reprezintă o aproximație a polinomului minimax întrucât se neglijează termenii de la rangul $n+2$ în sus.

Se pot obține aproximații mai bune ale polinomului minimax folosind algoritmi lui R  mes.

  n algoritmul 1 Remes, în locul rezolvării sistemului:

$$\sum_{k=0}^n a_i \cdot x_k^i + (-1)^k \cdot E = f(x_k), \quad k = 0 : n+1,$$

cu necunoscutele a_i , $i = 0 : n$   i E , ob  tinut din:

$$f(x_k) - p_n^*(x_k) = (-1)^k \cdot E \quad k = 0 : n+1,$$

$$p_n^*(x_k) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x_k^i.$$

se construiesc polinoamele de interpolare Lagrange: $R_{n+1}(x)$   i $S_{n+1}(x)$ ale func  iilor $f(x)$   i $(-1)^k$:

$$R_{n+1}(x_k) = f(x_k), \quad k = 0 : n+1,$$

$$S_{n+1}(x_k) = (-1)^k,$$

cu care se face aproximarea în:

$$p_n^*(x) = R_{n+1}(x) - E \cdot S_{n+1}(x)$$

Valoarea E se determina impun  nd coeficientul puterii $n+1$ să fie 0:

$$a_{n+1} = r_{n+1} - E \cdot s_{n+1} = 0,$$

$$E = \frac{r_{n+1}}{s_{n+1}},$$

$$a_i = r_i - \frac{r_{n+1}}{s_{n+1}} \cdot s_i, \quad i = 0 : n.$$

Algoritmul 2 R  m  s porne  te de la polinomul astfel determinat   i stabile  te valoarea extremă a func  iei $e(x)$; fie x_M abscisa pentru care se atinge acest extrem.

```
[a, x, y] = Remes1(n, f, nrapel) este
/* Intrări:
/* n = gradul polinomului minimax
/* f = func  ia aproximată prin polinomul minimax
/* nrapel = indicator al primului apel al procedurii
/*          în care se ini  ializeaza tabelele x   i y.
/* Apelurile următoare făcute din Remes2
/*   modifică o singură componentă din x   i y
/* Ie  iri:
/* a = tabel coeficien  i polinom minimax
/* x= abscisele punctelor de oscila  ie
/* y = ordinatele punctelor de oscila  ie
{ dacă nrapel = 0 atunci
    pentru k    0 : n+1
        {x(k)    cos (k*pi/(n+1))
        y(k)    f(x(k))
        dacă k este impar atunci z(k)    -1
```

```

                                altfel z(k) ← 1
        }
        calcul coeficienți r polinom Lagrange în (x, y)
        calcul coeficienți s polinom Lagrange în (x, z)
        E ← r(n+1) / s(n+1)
        pentru k ← 0 : n
            a(k) ← r(k) - E*s(k)
    }

```

Dacă x_M este unul din puncte, determinarea polinomului minimax s-a încheiat, în caz contrar se încadrează între două puncte consecutive: $x_p < x_M < x_{p+1}$ atunci se înlocuiește secvența de puncte:

```

    x0, x1, K, xp-1, xp, xp+1, K, xn+1,    prin:
    x0, x1, K, xp-1, xM, xp+1, K, xn+1,    dacă e(xp) · e(xM) > 0,
    x0, x1, K, xp-1, xp, xM, K, xn+1,    dacă e(xM) · e(xp+1) > 0.

```

și se reiau pașii pentru noul ansamblu de puncte.

```

[a, x, y] = Remes2(n, f) este
/* Intrări: n = gradul polinomului minimax
/* f = funcția aproximată prin polinomul minimax
/* ieșiri:
/* a = tabelul coeficienților polinomului minimax
/* x = abscisele punctelor de oscilație
/* y = ordonatele punctelor de oscilație
{ nrapel ← 0
  execută Remes1(n, f, a, x, y, nrapel)
  repetă
    căutare xm a.î |f(xm)-pn(xm)| să fie maxim
    dacă xm nu se află printre abscisele x atunci
      { încadrează x(p) < xm < x(p+1)
        dacă (y(p)-pn(x(p)))*(f(xm)-pn(xm)) > 0 atunci
          { x(p) ← xm
            y(p) ← ym
          }
        altfel
          { x(p+1) ← xm
            y(p+1) ← ym
          }
        nrapel ← nrapel + 1
        execută Remes1(n, f, a, x, y, nrapel)
      }
  până când xm coincide cu una din abscisele x
}

```

Economizare Cebâșev.

Polinoamele Cebâșev se pot folosi pentru a reduce gradul polinomului de aproximare, cu o pierdere minimă de precizie.

De obicei funcțiile se aproximează prin polinoame Taylor:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0),$$

cu restul aproximării:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

Polinoamele Taylor sunt exacte în vecinătatea lui x_0 , dar precizia lor scade rapid pe măsură ce x se îndepărtează de x_0 .

Intrucât polinoamele Cebâșev prezintă un minim al normei aproximării uniforme, ele pot fi folosite pentru reducerea gradului polinomului Taylor fără a depăși toleranța impusă erorii

În acest scop, în polinomul Taylor P_n se înlocuiește puterea cea mai mare x^n cu o combinație de polinoame Cebâșev și se neglijează termenul conținând pe $T_n(x)$, comițând prin aceasta o eroare care se majorează prin:

$$a_n \cdot T_n(x) < a_n.$$

De exemplu pentru funcția $f(x) = e^x$, pentru care se admite o toleranță a erorii $E_{\max} = 0.05$, polinomul Taylor de grad 4 pentru o dezvoltare în vecinătatea lui 0 este:

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

Majorarea erorii este:

$$f(x) - P_4(x) < \frac{f^{(5)}(\theta) \cdot x^5}{5!} < \frac{e}{120} \approx 0.023 < 0.05$$

Pentru a reduce gradul polinomului de aproximare, înlocuim puterea cea mai mare x^4 cu o combinație de polinoame Cebâșev:

$$\begin{aligned} P_4(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{24} \left[T_0(x) + \frac{1}{2} T_2(x) + \frac{1}{8} T_4(x) \right] = \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{64} + \frac{1}{48} (2x^2 - 1) + \frac{1}{192} T_4(x) = \\ &= \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24} \cdot x^2 + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{192} \cdot T_4(x) \end{aligned}$$

Prin reducerea termenului în $T_4(x)$ se comite o eroare majorată de:

$$\frac{1}{192} \cdot T_4(x) < \frac{1}{192} \approx 0.005$$

Eroarea cumulată:

$$R_4(x) + \frac{1}{192} \cdot T_4(x) < 0.023 + 0.005 = 0.028 < E_{\max} = 0.05$$

nu depășește toleranța admisă.