

INTEGRAREA ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE CU CONDIȚII ÎNȚIALE

1. Metode cu pași separați

Formularea problemei

Considerăm date:

- intervalul închis $I = [x_0, x_0 + a] \subset \mathbb{R}$,
- funcția continuă $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow f(x, y)$,
- ecuația diferențială $P : y' = f(x, y)$,

Problema diferențială de ordinul 1 constă în determinarea funcției derivabile

$$y : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow y(x),$$

cu proprietatea că pentru $\forall x \in I$ avem $y'(x) \equiv f(x, y(x))$.

Pentru un *sistem de ecuații diferențiale de ordinul 1* se cunosc funcțiile continue

$$f_j : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x, y_1, \dots, y_n) \rightarrow (z_1, z_2, \dots, z_n), \quad j = 1 : n.$$

și ecuațiile diferențiale

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, K, y_n), \\ y_2' &= f_2(x, y_1, K, y_n), \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, K, y_n). \end{aligned}$$

și interesează determinarea funcțiilor derivabile

$$y_j : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \rightarrow y_j(x),$$

astfel încât $y_j'(x) \equiv f_j(x, y_1(x), K, y_n(x))$, $j = 1 : n$.

Integrarea unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul p

$$y_j^{(p)} = f_j(x, y_1, K, y_n, y_1', K, y_n', y_1^{(p-1)}, K, y_n^{(p-1)}), \quad j = 1 : n,$$

scris în notație vectorială simplificată sub forma

$$y^{(p)} = f(x, y, y', K, y^{(p-1)}),$$

cu $f_j : I \times (\mathbb{R}^n)^p \rightarrow \mathbb{R}$,

(sau $f : I \times (\mathbb{R}^n)^p \rightarrow \mathbb{R}^n$),

presupune determinarea funcțiilor derivabile

$$y_j : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \rightarrow y_j(x) \quad (\text{sau } y : x \rightarrow y(x)) \quad \text{Sistemul de ecuații}$$

diferențiale de ordin p poate fi redus folosind substituțiile de mai jos:

$$\begin{aligned} y &= v_1, \\ y' &= v_2, \\ &\vdots \\ y^{(p-1)} &= v_p. \end{aligned}$$

la sistemul de ecuații diferențiale de ordin 1

$$\begin{aligned} v_1' &= v_2, \\ v_2' &= v_3, \\ &\vdots \\ v_p' &= f(x, v_1, v_2, K, v_p). \end{aligned}$$

Existența soluțiilor ecuațiilor diferențiale și sistemelor de ecuații diferențiale este condiționată de o suficientă "netezime" a funcțiilor f . Pentru unicitatea soluțiilor, și prin urmare pentru o bună

formulare a problemei de integrare numerică, se impun condiții suplimentare, cum sunt condițiile inițiale, finale, etc.

Problema diferențială cu condiții inițiale (problema Cauchy) constă din rezolvarea ecuației (3)

$$P1 : y' = f(x, y), \quad \text{impunând condiția inițială}$$

$$P2 : y(x_0) = \lambda, \text{ cu } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ dat.}$$

Vom presupune în mod constant în cele ce urmează că funcțiile f satisfac o *condiție Lipschitz*

$$\forall x \in I, \forall u, v \in \mathbb{R}^n, \exists L > 0, \text{ astfel încât}$$

$$|f(x, u) - f(x, v)| < L \cdot |u - v|.$$

Condiția Lipschitz asigură *existența și unicitatea soluției* problemei Cauchy.

Problema diferențială cu condiții inițiale este echivalentă cu determinarea unei funcții y continue pe I , cu proprietatea că

$$y(x) = \lambda + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

echivalență cunoscută și sub numele de *metoda constructivă Picard*

Metoda nu este aplicabilă analitic, deoarece f nu admite în general primitive. De cele mai multe ori soluția analitică nu este exprimabilă prin funcții elementare, sau este foarte greu de găsit și de aceea se apelează la tehnici de integrare numerică ce oferă valori aproximative ale soluției într-o diviziune a lui I . Câteva dintre cele mai importante metode numerice sunt prezentate în continuare.

Metoda lui Euler

Se împarte intervalul $I = [x_0, x_0 + a]$ în N intervale echidistante de lungime

$$h = \frac{a}{N},$$

prin punctele de abscise

$$x_i = x_0 + i \cdot h = x_0 + i \cdot \frac{a}{N},$$

și se aproximează soluția $y(x_i) \approx Y_i$, în care

$$\begin{cases} Y_0 = \lambda, \\ Y_{i+1} = Y_i + h \cdot f(x_i, Y_i), \quad i = 0 : N - 1. \end{cases}$$

```
function y = Euler(x0, a, n, f, y0)
/* Intrări:
/*x0=capătul stâng al intervalului de integrare
/* a = lungimea intervalului
/* n = numărul de puncte
/* y0 = condiția inițială
/* f = funcția de integrat y'=f(x,y)
/* ieșiri:
/* y = vectorul aproximațiilor soluției
    y = zeros(n+1, 1);
    y(1) = y0;
    h = a / n
    for i = 2 : n+1
        x = x0 + i*h
        y(i) = y(i-1) + h*f(x, y(i-1))
    end
```

Consistență, stabilitate, convergență

O metodă cu pași separați determină aproximația soluției în pasul următor $\mathbf{Y}_{i+1}$, folosind numai informația din pasul curent $\mathbf{i}$

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_0 = \lambda_h, \\ \mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{Y}_i + h \cdot \mathbf{f}_h(\mathbf{x}_i, \mathbf{Y}_i), \end{cases} \quad i = 0, 1, K$$

Eroarea într-un pas (în $\mathbf{x}_i$) se definește ca

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{y}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{Y}_i,$$

iar eroarea globală

$$\mathbf{E}_N = \max_{i=0:N} |\mathbf{e}_i|.$$

O metodă cu pași separați este *consistentă* dacă

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{f}_h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Stabilitatea unei metode cu pași separați impune ca variația condițiilor inițiale să nu producă variații mari în rezultate.

Fie problema diferențială cu condiții inițiale

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(\mathbf{x}_0) = \lambda,$$

problema diferențială *perturbată*

$$\mathbf{z}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \delta(\mathbf{x}), \quad \mathbf{z}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0 + \epsilon_0,$$

și metodele cu pași separați corespunzătoare

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{i+1} &= \mathbf{Y}_i + h \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{Y}_i), \\ \mathbf{Z}_{i+1} &= \mathbf{Z}_i + h \cdot [\mathbf{f}_h(\mathbf{x}_i, \mathbf{Y}_i) + \epsilon_{iN}]. \end{aligned}$$

Metoda cu pași separați este stabilă dacă

$$\begin{aligned} \forall \lim_{N \rightarrow \infty} |\epsilon_{iN}| = 0, \exists K_1, K_2 > 0 \text{ astfel încât} \\ \max_{0 \leq i \leq N} |\mathbf{Y}_i - \mathbf{Z}_i| \leq K_1 \cdot |\mathbf{Y}_0 - \mathbf{Z}_0| + K_2 \cdot \max_{0 \leq i \leq N} |\epsilon_{iN}|. \end{aligned}$$

Ilustrăm noțiunea de stabilitate a metodei pe problema simplă

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{Y}_0,$$

$$\mathbf{y}'(\mathbf{x}) = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{y}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{A} > 0.$$

având soluția

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{Y}_0 \cdot e^{-\mathbf{A}\mathbf{x}}.$$

Metoda Euler furnizează aproximația

$$\mathbf{Y}_n = (1 - h\mathbf{A})^n \mathbf{Y}_0,$$

Deoarece $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = 0$ este necesar ca $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{Y}_n = 0$,

care ne conduce la

$$|1 - h\mathbf{A}| < 1 \Rightarrow 0 < h < \frac{2}{\mathbf{A}}.$$

adică metoda Euler este *condițional stabilă*, aceasta furnizează rezultate corecte numai dacă se alege pasul h suficient de mic. Condiția de mai sus definește *A-stabilitatea metodei*.

Pentru stabilirea convergenței metodei Euler se scade din dezvoltarea în serie Taylor:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h \cdot f(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2} \cdot y''(\xi_i)$$

cu $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ și $|y''(\xi_i)| \leq M$.

relația lui Euler: $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$

$$e_{i+1} = e_i + h[f(x_i, y(x_i)) - f(x_i, y_i)] + h^2/2 \cdot |y''(\xi_i)|$$

$$|e_{i+1}| \leq |e_i| + h|f(x_i, y(x_i)) - f(x_i, y_i)| + h^2/2 \cdot M$$

$$|e_{i+1}| \leq |e_i| + h \cdot L \cdot |e_i| + h^2/2 \cdot M \leq (1+hL)|e_i| + h^2/2 \cdot M$$

$$|e_1| \leq h^2/2 \cdot M$$

$$|e_2| \leq (1+hL)|e_1| + h^2/2 \cdot M \leq [(1+hL)+1] \cdot h^2/2 \cdot M$$

$$|e_3| \leq (1+hL)|e_2| + h^2/2 \cdot M \leq [(1+hL)^2 + (1+hL)+1] \cdot h^2/2 \cdot M$$

$$|e_n| \leq [1 + (1+hL) + (1+hL)^2 + \dots + (1+hL)^{n-1}] \cdot h^2/2 \cdot M$$

$$|e_n| \leq \frac{(1+hL)^n - 1}{hL} \cdot \frac{h^2 M}{2} = \frac{(1+hL)^n - 1}{2L} \cdot hM$$

$$1+hL \leq e^{hL} \Rightarrow (1+hL)^n \leq e^{nhL} = e^{(x_n - x_0)L}$$

$$|e_n| \leq \frac{hM}{2L} \cdot [e^{(x_n - x_0)} - 1] \Rightarrow e_n = O(h)$$

Dacă $y(x)$ este soluția exactă și y_n^h este aproximația lui $y(x)$ pentru h dat, atunci:

$$x - x_0 = nh$$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} y_n^h = y(x)$$

$$|y(x) - y_n^h| \leq \frac{hM}{2L} \cdot [e^{(x-x_0)L} - 1] \Rightarrow \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} |y(x) - y_n^h| = 0$$

Metode de tip Runge - Kutta

O metodă de tip *Runge-Kutta* este o metodă cu pași separați, în care funcția $f_h(x, y)$ se determină astfel

- se împarte intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ în q subintervale cu abscisele

$$x_{ij} = x_{i0} + u_j h, \quad 0 \leq u_j \leq 1, \quad u_0 = 0, u_q = 1.$$

Numărul subintervalelor q definește *rangul metodei*.

- se calculează aproximațiile soluției în punctele intermediare de forma

$$\begin{cases} y_{i0} = y_i, \\ y_{ij} = y_i + h \cdot \sum_{l=0}^{j-1} K_{jl} \cdot f(x_{il}, y_{il}), \quad j = 1 : q. \end{cases}$$

Punctele intermediare x_{ij} și constantele K_{jl} se obțin din condiția ca în dezvoltarea Taylor a lui y_{ij} după puterile lui h , să coincidă cât mai mulți termeni cu cei din dezvoltarea Taylor a soluției exacte.

Metoda este de ordinul p , dacă în cele două dezvoltări termenii coincid până la h^p inclusiv.

Metoda Runge-Kutta de ordin 1 și rang 1 este de forma

$$\begin{cases} y_{i0} = y_i, \\ y_{i1} = y_i + h \cdot K_{10} \cdot f(x_{i0}, y_{i0}). \end{cases}$$

Dezvoltarea în serie Taylor a soluției exacte este

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y_i + \frac{h}{1!} y'_i + \frac{h^2}{2!} + K = y_i + hf(x_{i0}, y_{i0}) + K$$

Din identificare se obține $K_{10} = 1$, care conduce la metoda lui Euler. Metoda nu este utilizată în mod practic, deoarece eroarea într-un pas, de ordinul h^2 , este importantă.

În metodele cu pași separați de rang 2 și ordin 2 se ia

$$x_{ij} = x_{i0} + u_j h, \quad j = 0 : 2, \quad u_0 = 0, \quad u_1 \in [0, 1], \quad u_2 = 1$$

$$\begin{cases} y_{i0} = y_i, \\ y_{ij} = y_i + h \cdot \sum_{l=0}^{j-1} K_{jl} \cdot f(x_{il}, y_{il}), \quad j = 1, 2. \end{cases}$$

Pentru $j=1$ avem

$$y_{i1} = y_i + hK_{10}f(x_{i0}, y_{i0}).$$

Dezvoltarea Taylor a soluției este

$$y(x_{i1}) = y(x_{i0} + u_1 h) = y_i + u_1 h y'_i + K = y_i + u_1 h f_0 + K$$

Din identificare rezultă $K_{10} = u_1$.

Pentru $j=2$ avem

$$y_{i2} = y_i + hK_{20}f(x_{i0}, y_{i0}) + hK_{21}f(x_{i1}, y_{i1}).$$

În care $f(x_{i1}, y_{i1})$ se înlocuiește cu dezvoltarea în serie Taylor în vecinătatea punctului (x_{i0}, y_{i0})

$$f(x_{i1}, y_{i1}) = f(x_{i0}, y_{i0}) + (x_{i1} - x_{i0}) \frac{\partial f}{\partial x} + (y_{i1} - y_{i0}) \frac{\partial f}{\partial y} + K$$

$$f(x_{i1}, y_{i1}) = f_0 + u_1 h \frac{\partial f}{\partial x} + K_{10} h f_0 \frac{\partial f}{\partial y} + K,$$

deci

$$y_{i2} = y_i + (K_{20} + K_{21}) h f_0 + u_1 h^2 K_{21} \frac{\partial f}{\partial x} + h^2 K_{21} K_{10} f \frac{\partial f}{\partial y}$$

Dar:

$$y'(x) = f(x, y)$$

$$y''(x) = f'(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} y'(x) = f_x + f \cdot f_y$$

$$y'''(x) = f_{xx} + 2f_{xy} \cdot f + f_{yy} \cdot f^2 + f_y \cdot f_x + f_y^2 \cdot f$$

Dezvoltarea exactă este

$$y(x_{i2}) = y(x_i + h) = y_i + h y'_i + \frac{h^2}{2} y''_i + K = y_i + hf + \frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right] + K,$$

de unde rezultă

$$K_{20} + K_{21} = 1,$$

$$u_1 K_{21} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Sistem care are soluția } K_{20} = 1 - \frac{1}{2u_1}, \quad K_{21} = \frac{1}{2u_1}.$$

Relațiile Runge-Kutta, au în acest caz forma

$$y_{i0} = y_i,$$

$$y_{i1} = y_i + hu_1 f(x_{i0}, y_{i0}),$$

$$y_{i2} = y_i + h \left(1 - \frac{1}{2u_1} \right) f(x_{i0}, y_{i0}) + \frac{h}{2u_1} f(x_{i1}, y_{i1}).$$

sau:

$$y_{i+1} = y_i + \left(1 - \frac{1}{2\alpha} \right) K_1 + \frac{1}{2\alpha} K_2$$

$$K_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$K_2 = hf(x_i + \alpha h, y_i + \alpha K_1)$$

Prezintă interes practic următoarele cazuri particulare în raport cu valoarea lui $u_1 \in [0, 1]$.

- metoda tangentei ameliorate, în care $u_1 = \frac{1}{2}$. Rezultă

$$x_{i1} = x_{i0} + u_1 h = x_i + \frac{h}{2},$$

$$y_{i1} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i),$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i1}, y_{i1}).$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)\right)$$

- - metoda Euler-Cauchy, în care $u_1 = 1$

$$x_{i1} = x_i + h$$

$$y_{i1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i1}, y_{i1})]$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))]$$

- metoda Heun pentru $u_1 = \frac{2}{3}$ care conduce la relațiile

$$x_{i1} = x_i + \frac{2}{3} h,$$

$$y_{i1} = y_i + \frac{2}{3} hf(x_{i1}, y_{i1}),$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4} f(x_i, y_i) + \frac{3h}{4} f(x_{i1}, y_{i1}).$$

Eroarea într-un pas în metodele Runge-Kutta de ordin 2 este

$$\varepsilon = \frac{h^3}{6} \left(1 - \frac{3}{2} u_1 \right) y'''(\xi) + \frac{3}{2} u_1 y''(\xi) \frac{\partial f}{\partial y}.$$

În mod frecvent se utilizează o metodă de tip Runge-Kutta de ordin 4 de forma

$$K_1 = h \cdot f(x_i, y_i),$$

$$K_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2}\right),$$

$$K_3 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2}{2}\right),$$

$$K_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + K_3),$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4}{6}.$$

a cărei implementare este.

```
function y = Runge_Kutta(a, b, n, y0, f)
% Intrări:
% a, b - intervalul de integrare
% n - numărul de puncte
% y0 - condiția inițială
% f - funcția y'=f(x,y)
% Ieșiri:
% y - aproximarea soluției în punctele x_i
h = (b-a)/n;
y = zeros(n+1,1);
y(1) = y0;
for k = 2 : n+1
    x = a + i*h
    K1 = h.f(x, y(i-1))
    K2 = h.f(x + h/2, y(i-1) + K1/2)
    K3 = h.f(x + h/2, y(i-1) + K2/2)
    K4 = h.f(x + h, y(i-1) + K3)
    y(k) = y(k-1) + (K1 + 2.*K2 + 2.*K3 + K4)/6
end
```

Pentru ca metoda Runge-Kutta

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \varphi(x_i, y_i, h)$$

să fie convergentă către soluția $y(t)$ a problemei diferențiale, atunci când $h \rightarrow 0$ este suficient ca φ să verifice o condiție Lipschitz globală și

$$\varphi(x, y, 0) = f(x, y).$$

Verificarea *A-stabilității* pentru metoda Runge-Kutta de ordinul 4 conduce la

$$K_1 = h \cdot f(t_n, y_n) = -hAy_n,$$

$$K_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1}{2}\right) = -hA\left(y_n + \frac{K_1}{2}\right) = -hAy_n\left(1 - \frac{hA}{2}\right)$$

$$K_3 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_2}{2}\right) = -hAy_n\left(1 - \frac{hA}{2} + \frac{h^2A^2}{4}\right),$$

$$K_4 = hf(t_n + h, y_n + K_3) = -hAy_n\left(1 - hA + \frac{h^2A^2}{2} - \frac{h^3A^3}{4}\right),$$

Prin înlocuire se obține o ecuație recurentă de forma

$$y_{n+1} = y_n + \frac{K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4}{6}$$

$$= y_n \left[1 - hA + \frac{1}{2} (hA)^2 - \frac{1}{6} (hA)^3 + \frac{1}{24} (hA)^4 \right],$$

$$y_{n+1} = p_4(hA) \cdot y_n,$$

cu soluția

$$\mathbf{y}_n = [\mathbf{p}_4(h\mathbf{A})]^n,$$

Întrucât

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{y}_n = 0,$$

adică pasul de discretizare nu poate fi ales arbitrar

$$|\mathbf{p}_4(h\mathbf{A})| < 1 \Rightarrow 0 < h < \frac{2.78}{\mathbf{A}}.$$

Efortul de calcul în metodele Runge-Kutta este legat, în principal, de evaluarea lui $\mathbf{f}$. Metoda Runge-Kutta de ordin 4 necesită 4 evaluări într-un pas, cu eroarea într-un pas de ordinul $\mathcal{O}(h^4)$

Controlul erorii - metode adaptive cu pași separați

O metodă ideală cu pași separați

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h_i \mathbf{f}_h(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, h_i),$$

trebuie să ne asigure pentru o toleranță ε dată, un număr minim de puncte intermediare, astfel încât eroarea globală să satisfacă următoarea condiție

$$\mathbf{E}_n = \max_{0 \leq i \leq n} |\mathbf{y}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{y}_i| < \varepsilon.$$

Întrucât eroarea globală nu poate fi determinată, deoarece nu se cunoaște valoarea exactă $\mathbf{y}(\mathbf{x}_i)$, vom utiliza o estimare a erorii locale pe baza calculului soluției cu două metode de precizii diferite și vom folosi această estimare pentru ajustarea pasului h și prin aceasta pentru “controlul erorii”.

În metoda Euler

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_0 &= \boldsymbol{\lambda}, \\ \mathbf{y}_{k+1} &= \mathbf{y}_k + h \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k), \end{aligned}$$

eroarea într-un pas satisface ecuația

$$\mathbf{e}_{k+1} = \frac{\mathbf{y}(\mathbf{x}_{k+1}) - \mathbf{y}(\mathbf{x}_k)}{h} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}(\mathbf{x}_k)).$$

În metoda Euler modificată

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}}_0 &= \boldsymbol{\lambda}, \\ \bar{\mathbf{y}}_{k+1} &= \bar{\mathbf{y}}_k + \frac{h}{2} [\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{y}}_k) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}, \bar{\mathbf{y}}_k + h\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{y}}_k))] \end{aligned}$$

eroarea de trunchiere într-un pas, în ipoteza $\mathbf{y}_k \approx \mathbf{y}(\mathbf{x}_k) \approx \bar{\mathbf{y}}_k$ este

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\mathbf{x}_{k+1}) - \mathbf{y}_{k+1} &= \mathbf{y}(\mathbf{x}_{k+1}) - \mathbf{y}_k - h\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) \approx \\ \mathbf{y}(\mathbf{x}_{k+1}) - \mathbf{y}(\mathbf{x}_k) - h\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) &= h\mathbf{e}_{k+1}, \end{aligned}$$

de unde obținem estimarea

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{k+1} &\approx \frac{\mathbf{y}(\mathbf{x}_{k+1}) - \mathbf{y}_{k+1}}{h} = \frac{\mathbf{y}(\mathbf{x}_{k+1}) - \bar{\mathbf{y}}_{k+1}}{h} + \frac{\bar{\mathbf{y}}_{k+1} - \mathbf{y}_{k+1}}{h} \\ \mathbf{e}_{k+1} &\approx \bar{\mathbf{e}}_{k+1} + \frac{\bar{\mathbf{y}}_{k+1} - \mathbf{y}_{k+1}}{h}, \\ \mathbf{e}_{k+1} &\approx \frac{\bar{\mathbf{y}}_{k+1} - \mathbf{y}_{k+1}}{h}. \end{aligned}$$

Această estimare a erorii poate fi folosită pentru exprimarea pasului optimal care să asigure o eroare globală minimă.

Fie două metode cu pași separați

$$\begin{cases} \mathbf{y}_0 = \boldsymbol{\lambda}, \\ \mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \mathbf{h}_k \mathbf{f}_h(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{h}_k). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{y}}_0 = \boldsymbol{\lambda}, \\ \bar{\mathbf{y}}_{k+1} = \bar{\mathbf{y}}_k + \mathbf{h}_k \bar{\mathbf{f}}_h(\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{y}}_k, \mathbf{h}_k). \end{cases}$$

cu erorile locale de trunchiere $\mathbf{e}_{k+1} = \mathcal{O}(\mathbf{h}^n)$ și respectiv $\bar{\mathbf{e}}_{k+1} = \mathcal{O}(\mathbf{h}^{n+1})$. Procedând ca mai înainte avem

$$\mathbf{e}_{k+1} \approx \frac{\bar{\mathbf{y}}_{k+1} - \mathbf{y}_{k+1}}{\mathbf{h}}, \quad \text{cu } \mathbf{e}_{k+1} = \mathcal{O}(\mathbf{h}^n) \text{ de unde}$$

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{h}^n \approx \frac{\bar{\mathbf{y}}_{k+1} - \mathbf{y}_{k+1}}{\mathbf{h}},$$

$$\mathbf{e}_{k+1}(\mathbf{qh}) \approx \mathbf{C} \cdot (\mathbf{qh})^n = \mathbf{q}^n \mathbf{C} \mathbf{h}^n \approx \mathbf{q}^n \frac{\bar{\mathbf{y}}_{k+1} - \mathbf{y}_k}{\mathbf{h}}.$$

Se alege $\mathbf{q}$ astfel încât

$$|\mathbf{e}_{k+1}(\mathbf{qh})| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q}^n \frac{|\bar{\mathbf{y}}_{k+1} - \mathbf{y}_k|}{\mathbf{h}} < \varepsilon,$$

rezultă condiția

$$\mathbf{q} \leq \sqrt[n]{\frac{\varepsilon \mathbf{h}}{|\bar{\mathbf{y}}_{k+1} - \mathbf{y}_k|}},$$

Relațiile de calcul devin

$$\bar{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \frac{16}{135} \mathbf{K}_1 + \frac{6656}{12825} \mathbf{K}_3 + \frac{28561}{56430} \mathbf{K}_4 - \frac{9}{50} \mathbf{K}_5 + \frac{2}{55} \mathbf{K}_6,$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \frac{25}{216} \mathbf{K}_1 + \frac{1408}{2565} \mathbf{K}_3 + \frac{2197}{4104} \mathbf{K}_4 - \frac{1}{5} \mathbf{K}_5,$$

unde

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \mathbf{h} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k), \\ \mathbf{K}_2 &= \mathbf{h} \cdot \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_k + \frac{\mathbf{h}}{4}, \mathbf{y}_k + \frac{\mathbf{K}_1}{4}\right), \\ \mathbf{K}_3 &= \mathbf{h} \cdot \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_k + \frac{3\mathbf{h}}{8}, \mathbf{y}_k + \frac{3\mathbf{K}_1}{32} + \frac{9\mathbf{K}_2}{32}\right), \\ \mathbf{K}_4 &= \mathbf{h} \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_k + \frac{12\mathbf{h}}{13}, \mathbf{y}_k + \frac{1932\mathbf{K}_1}{2197} - \frac{7200\mathbf{K}_2}{2197} + \frac{7296\mathbf{K}_3}{2197}\right), \\ \mathbf{K}_5 &= \mathbf{h} \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_k + \mathbf{h}, \mathbf{y}_k + \frac{439\mathbf{K}_1}{216} - 8\mathbf{K}_2 + \frac{3680\mathbf{K}_3}{513} - \frac{845\mathbf{K}_4}{4104}\right), \\ \mathbf{K}_6 &= \mathbf{h} \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_k + \frac{\mathbf{h}}{2}, \mathbf{y}_k - \frac{8\mathbf{K}_1}{27} + 2\mathbf{K}_2 - \frac{3544\mathbf{K}_3}{2565} + \frac{1859\mathbf{K}_4}{4104} - \frac{11\mathbf{K}_5}{40}\right). \end{aligned}$$

Metoda prezintă avantajul că necesită numai 6 evaluări ale funcției $\mathbf{f}$ într-un pas în loc de 16 pentru metodele convenționale de ordin 4 și 5.

Pornind cu un pas inițial $\mathbf{h}$, se determină $\mathbf{y}_{k+1}$ și $\bar{\mathbf{y}}_{k+1}$, care ne conduc la $\mathbf{q}$, calculul repetându-se pentru pasul $\mathbf{qh}$.

$$q = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon \cdot h}{2|\bar{y}_{k+1} - y_{k+1}|}} = 0.84 \cdot \sqrt[4]{\frac{\varepsilon \cdot h}{|\bar{y}_{k+1} - y_{k+1}|}}.$$

Metoda elimină de asemeni variațiile mari ale pasului limitând q și h .

```
[n,x,y,OK]=RK_Fehlberg(a,b,ε,y0,hmin,hmax,f)
%Intrări: a, b - intervalul de integrare
%ε - toleranța impusă pentru eroare
%hmin, hmax - limitele de variație ale pasului
%f - funcția de integrat y'=f(x, y)
%Ieșiri:
% OK - indicator de reușită/eșec al metodei
% n - numărul de puncte intermediare folosit
% x - tabloul punctelor intermediare
% y - aproximația soluției în punctele xk

qmin = 0.1;      qmax = 4;
t = a;           u = y0;
x(0) = t;        y(0) = u;
h = hmax;
OK = true;
n = 0;
while t < b ^ OK
    K1 = h*f(t, u);
    K2 = h*f(t+1/4*h, u+1/4*K1);
    K3 = h*f(t+3/8*h, u+3/32*K1+9/32*K2);
    K4 = h*f(t+12/13*h, u+1932/2197*K1 -7200/2197* K2 +7296/2197*K3);
    K5 = h*f(t+h, u+439/216*K1-8*K2+3680/513*K3-845/4104*K4);
    K6 = h*f(t+1/2*h, u-8/27*K1+2*K2 -3544/2565*K3+1859/4104*K4-11/40*K5);
    e = abs(1/360*K1-128/4275*K3-2197/75240*K4+1/50*K5-2/55*K6);
    q = 0.84.(ε / e)^0.25;
    if e ≤ ε
        t = t+h;
        u = u + 25/216*K1 + 1408/2565*K2 +2197/4104*K3 - 1/5*K5;
        n = n+1;
        x(n) = t;
        y(n) =u;
    end
    if q < qmin
        q = qmin;
    if q > qmax
        q = qmax;
    h = q*h;
    if h > hmax
        h = hmax;
    if h < hmin
        OK = false;
end
```

Metode cu pași legați.

Metodele cu pași separați sunt utilizate frecvent datorită simplității lor și faptului că necesită puține informații inițiale. Ele prezintă totuși dezavantajul lipsei de precizie.

Spre deosebire de acestea, metodele cu *pași legați* (sau *metodele multipas*) folosesc mai multe informații inițiale, deci sunt mai precise.

S-a amintit mai înainte că problema diferențială cu condiții inițiale

$$\begin{cases} \mathbf{y}(\mathbf{x}_0) = \lambda, \\ \mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{cases}$$

în care $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ satisface *condiția Lipschitz* globală

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v})| \leq \mathbf{L} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|,$$

este echivalentă cu determinarea funcției

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \lambda + \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{t}, \mathbf{y}(\mathbf{t})) d\mathbf{t}.$$

Pentru a o aplica, vom presupune cunoscute valorile aproximative

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_k &\approx \mathbf{y}(\mathbf{x}_k), \quad \mathbf{f}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k), \\ \mathbf{y}_{k-1} &\approx \mathbf{y}(\mathbf{x}_{k-1}), \quad \mathbf{f}_{k-1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{k-1}), \\ &\vdots \\ \mathbf{y}_{k-r} &\approx \mathbf{y}(\mathbf{x}_{k-r}), \quad \mathbf{f}_{k-r} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-r}, \mathbf{y}_{k-r}). \end{aligned}$$

Aplicând relația pentru $\mathbf{x}_k$ și $\mathbf{x}_{k+1}$

$$\begin{cases} \mathbf{y}(\mathbf{x}_{k+1}) = \lambda + \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}_{k+1}} \mathbf{f}(\mathbf{t}, \mathbf{y}(\mathbf{t})) d\mathbf{t}, \\ \mathbf{y}(\mathbf{x}_k) = \lambda + \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}_k} \mathbf{f}(\mathbf{t}, \mathbf{y}(\mathbf{t})) d\mathbf{t}, \end{cases}$$

rezultă

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{y}(\mathbf{x}_k) + \int_{\mathbf{x}_k}^{\mathbf{x}_{k+1}} \mathbf{f}(\mathbf{t}, \mathbf{y}(\mathbf{t})) d\mathbf{t}.$$

Pentru calculul integralei vom utiliza polinomul de interpolare $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ a lui $\mathbf{f}$ dat sub forma celei de-a treia formule de interpolare Newton-Gregory

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{x}_k}^{\mathbf{x}_{k+1}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} &= \int_{\mathbf{x}_k}^{\mathbf{x}_{k+1}} \sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{-u}{j} \nabla^j \mathbf{f}_k + \\ &\int_{\mathbf{x}_k}^{\mathbf{x}_{k+1}} \frac{\mathbf{f}^{(r+1)}(\xi_k, \mathbf{y}(\xi_k))}{(r+1)!} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k-r}) d\mathbf{x} = \\ &\sum_{j=0}^r \nabla^j \mathbf{f}_k h \cdot (-1)^j \int_0^1 \binom{-u}{j} du + \\ &\frac{h^{r+2} \mathbf{f}^{(r+1)}(\xi_k, \mathbf{y}(\xi_k))}{(r+1)!} \cdot \int_0^1 u(u+1) K(u+r) du. \end{aligned}$$

Integralele

$$c_k = (-1)^k \int_0^1 \binom{-u}{k} du,$$

calculate cu metoda seriei generatoare au valorile $1, \frac{1}{2}, \frac{5}{12}, \frac{3}{8}, \frac{251}{720}, K$ etc și duc la relația

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h \sum_{j=0}^r c_j \nabla^j \mathbf{f}_k,$$

definind o *metodă explicită*, cunoscută sub numele de *metoda Adams-Bashforth*.

În același mod se obține *metoda implicită Adams-Moulton*

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h \sum_{j=0}^r \mathbf{d}_j \nabla^j \mathbf{f}_{k+1}.$$

Putem trece la o relație de recurență liniară mai generală, aplicabilă atât pentru metode explicite cât și implicite, de forma

$$\mathbf{y}_{k+1} = \sum_{j=0}^r \alpha_j \mathbf{y}_{k-j} + h \sum_{j=-1}^r \beta_j \mathbf{f}_{k-j}.$$

O metodă explicită are $\beta_{-1} = 0$ în timp ce metodele implicite se caracterizează prin $\beta_{-1} \neq 0$.

Pentru determinarea coeficienților α_j , β_j vom impune ca relația să reprezinte soluția exactă pentru polinoame de grad cât mai ridicat.

Astfel pentru

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\mathbf{x}) &= 1, & \mathbf{y}'(\mathbf{x}) &= 0, \\ \mathbf{y}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}, & \mathbf{y}'(\mathbf{x}) &= 1, \\ \vdots & & & \\ \mathbf{y}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^p, & \mathbf{y}'(\mathbf{x}) &= p \cdot \mathbf{x}^{p-1}. \end{aligned}$$

se aleg punctele $\mathbf{x}_{k-r}, K, \mathbf{x}_k$ echidistante cu $h=1$ și originea în $\mathbf{x}_{k-r}$. Se obține sistemul

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^r \alpha_j &= 1, \\ \sum_{j=0}^r \alpha_j (r-j) + \sum_{j=0}^r \beta_j &= r, \\ \vdots & \\ \sum_{j=0}^r \alpha_j (r-j)^p + p \sum_{j=0}^r \beta_j (r-j)^{p-1} &= r^p. \end{aligned}$$

Determinarea celor $2r+2$ ($2r+3$ în cazul metodelor implicite), coeficienți impune tot atâtea relații, așadar formula va fi exactă pentru polinoame de grad $\leq 2r+1$ (respectiv $2r+2$ pentru metode implicite).

Metode explicite și implicite

Pentru $r=2$, metoda Adams-Bashforth este

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h \left(\mathbf{f}_k + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{f}_k \right) = \mathbf{y}_k + h \left(\mathbf{f}_k + \frac{\mathbf{f}_k - \mathbf{f}_{k-1}}{2} \right),$$

adică

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \frac{h}{2} (3\mathbf{f}_k - \mathbf{f}_{k-1}).$$

iar expresia erorii este în acest caz

$$\mathbf{e}_{k+1} = \frac{5}{12} h^2 \mathbf{y}'''(\xi_k).$$

În mod asemănător se obține

-pentru $r=3$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1} &= \mathbf{y}_k + \frac{h}{12} (23\mathbf{f}_k - 16\mathbf{f}_{k-1} + 5\mathbf{f}_{k-2}), \\ \mathbf{e}_{k+1} &= \frac{3}{8} h^3 \mathbf{y}^{(4)}(\xi_k); \end{aligned}$$

- pentru $r=4$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} (55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}),$$

$$e_{k+1} = \frac{251}{720} h^4 y^{(5)}(\xi_k);$$

- pentru $r=5$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{720} (1901f_k - 2774f_{k-1} + 2616f_{k-2} - 1274f_{k-3} + 251f_{k-4})$$

$$e_{k+1} = \frac{95}{288} h^5 y^{(6)}(\xi_k).$$

Metodele implicite Adams-Moulton corespunzătoare sunt

$$r=2 \quad e_{k+1} = -\frac{1}{24} h^3 y^{(4)}(\xi_k);$$

$$r=3 \quad y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} (9f_{k+1} + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2}),$$

$$e_{k+1} = -\frac{19}{720} h^4 y^{(5)}(\xi_k);$$

$$r=4 \quad y_{k+1} = y_k + \frac{h}{720} (251f_{k+1} + 646f_k - 264f_{k-1} + 106f_{k-2} - 19f_{k-3})$$

$$e_{k+1} = -\frac{3}{160} h^5 y^{(6)}(\xi_k).$$

Se mai folosesc de asemenea următoarele metode

- metoda explicită *Milne*

$$y_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4h}{3} (2f_k - f_{k-1} + 2f_{k-2}),$$

$$e_{k+1} = \frac{14}{45} h^4 y^{(5)}(\xi_k);$$

- -metoda implicită *Simpson*

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3} (2f_{k+1} + 4f_k + f_{k-1}),$$

$$e_{k+1} = -\frac{1}{90} h^4 y^{(5)}(\xi_k).$$

Metode predictor - corector

Metodele implicite asigură aproximații mai bune ale soluțiilor decât metodele explicite. De aceea ele se folosesc pentru a crește precizia rezultatelor obținute prin metode explicite.

Aplicarea unei metode implicite conduce la o ecuație neliniară de forma

$$y_{k+1} = hC_1 f(x_{k+1}, y_{k+1}) + C_2.$$

Rezolvarea ecuației neliniare se face de obicei prin metoda aproximațiilor succesive.

Metoda *predictor-corector* îmbină aplicarea unei metode explicite cu una implicită. Metoda explicită calculează o *predicție* a soluției, iar metoda implicită - o *corecție*, făcând o singură iterație, cu valoarea de pornire, predicția oferită de metoda explicită.

Astfel metoda explicită Adams-Bashforth de ordinul 3 furnizează *predicția*

$$y_{k+1}^{(p)} = y_k + \frac{h}{12} [23 \cdot f_k - 16 \cdot f_{k-1} + 5 \cdot f_{k-2}],$$

iar formula implicită Adams-Moulton de ordinul 2 corectează această valoare

$$y_{k+1}^{(c)} = y_k + \frac{h}{12} [5 \cdot y_{k+1}^{(p)} + 8 \cdot y_k - y_{k-1}].$$

Rezultă următorul algoritm

```
Function y = Pred_Cor(a, b, n, y0, f)
% Intrări: a, b = intervalul de integrare
%          n = numărul de puncte
%          y0= condiția inițială
%          f = funcția de integrat y'=f(x,y)
% Ieșiri: y = tabloul aproximațiilor soluției
Runge_Kutta(a, b, n, y0, f, y)
h = (b-a) / n;
x0=a; x1 = a+h; x2 = a+2h;
y0 = y(0); y1 = y(1); y2 = y(2);
for i = 3 : n
    x = a+i*h;
    ypr=y2+h(23f(x2,y2)-6f(x1,y1)+5f(x0,y0))/12;
    ycor=yp+h(5f(x,ypr)+8f(x2,y2)-f(x1,y1))/2;
    y(k) = ycor;
    y0 = y1; y1 = y2; y2 = ycor;
    x0 = x1; x1 = x2; x2 = x;
end
```

Convergența și stabilitatea metodelor multipas

Asociem metodei multipas liniare operatorul:

$$L[y, h] = y(x+h) - \sum_{j=0}^r \alpha_j y(x-jh) - h \sum_{j=-1}^r y'(x-jh)$$

Dezvoltăm $y(x+jh)$ și $y'(x+jh)$ în serie Taylor :

$$L[y, h] = C_0 y(x) + C_1 h y'(x) + \dots + C_q h^q y^{(q)}(x) + \dots$$

$$L[y, h] = \left[1 - \sum_{j=0}^r \alpha_j \right] y(x) + \sum_j y^{(j)}(x) \left[\frac{h^j}{j!} - \sum_{k=0}^r \alpha_k (-1)^j \frac{h^j}{j!} - \sum_{k=-1}^r \beta_k (-1)^{j-1} \frac{h^j}{(j-1)!} \right]$$

$$C_0 = 1 - \sum_{k=0}^r \alpha_k \quad C_1 = 1 - \sum_{k=0}^r \alpha_k (-k) - \sum_{k=-1}^r \beta_k$$

$$C_j = \frac{1}{j!} \left[1 - \sum_{k=0}^r \alpha_k (-k)^j - j \sum_{k=-1}^r \beta_k (-k)^{j-1} \right]$$

Metoda multipas are ordinul p , dacă este exactă pentru toate polinoamele de ordin $\leq p$, adică $L[x^k, h] = 0$, $k=0 : p$, dar $L[x^{p+1}, h] \neq 0$.

Dacă metoda multipas este de ordinul p atunci $C_0 = C_1 = \dots = C_p = 0$, $C_{p+1} \neq 0$

$$L[x^k, h] = \sum_{j=0}^r C_j \frac{d^j}{dx^j} (x^k) h^j =$$

$$C_r r! h^r + \Lambda + C_j r(r-1) \Lambda (r-j+1) h^{r-1} + \Lambda C_1 r x^{r-1} h + C_0 x^r$$

O metodă de ordinul p este *consistentă* dacă $p \geq 1$

$$\sum_{k=0}^r \alpha_k = 1 \quad - \sum_{k=0}^r k \cdot \alpha_k + \sum_{k=-1}^r \beta_k = 1$$

Enumerăm mai multe metode uzuale:

- metoda explicită Adams-Bashforth $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h \sum_{j=0}^r \beta_j \mathbf{f}_{k-j}$,
- metoda explicită Nystrom $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_{k-1} + h \sum_{j=0}^r \beta_j \mathbf{f}_{k-j}$,
- metoda implicită Adams-Moulton $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h \sum_{j=-1}^r \beta_j \mathbf{f}_{k-j}$,
- metoda implicită Simpson-Milne $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_{k-1} + h \sum_{j=-1}^r \beta_j \mathbf{f}_{k-j}$,

Se definesc polinoamele:

$$\rho(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^{k+1} - \sum_{j=0}^r \alpha_j \mathbf{z}^{k-j}, \quad \sigma(\mathbf{z}) = \sum_{j=-1}^r \beta_j \mathbf{z}^{k-j}.$$

Fie operatorul de deplasare $\mathbf{E}$ definit prin

$$\mathbf{E}\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_{k+1}.$$

Ecuția recurentă poate fi exprimată ca

$$\rho(\mathbf{E})\mathbf{y}_{k+1} - h \cdot \sigma(\mathbf{E})\mathbf{f}_{k+1} = 0.$$

Algoritmul multipas definit prin relația recurentă este zero-stabil dacă

- rădăcinile ecuației $\rho(\mathbf{z}) = 0$ sunt de modul subunitar i.e.

$$\rho(\mathbf{z}_i) = 0 \Rightarrow |\mathbf{z}_i| \leq 1;$$

- rădăcinile de modul 1 sunt simple

Stabilitatea este *puternică* dacă singura rădăcină de modul 1 este $\mathbf{z}_i = 1$.

Metoda Adams este *puternic stabilă* deoarece

$$\rho(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^{k+1} - \mathbf{z}^k = 0,$$

are singura rădăcină de modul 1 $\mathbf{z}_i = 1$.

Metoda Nystrom este *slab stabilă* căci

$$\rho(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^{k+1} - \mathbf{z}^{k-1} = 0.$$

are două rădăcini de modul 1 $\mathbf{z}_i = \pm 1$.

Impunem ca ecuația recurentă să aibă ordinul p . Se dezvoltă această ecuație în serie Taylor în vecinătatea unui punct t

$$(\rho(\mathbf{E})\mathbf{y}(t) - h\rho(\mathbf{E})\mathbf{y}'(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i h^i \mathbf{y}^{(i)}(t),$$

în care

$$c_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + K + \alpha_r = \rho(1),$$

$$c_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + K + r\alpha_r - (\beta_0 + \beta_1 + K + \beta_r) = \rho'(1) - \sigma(1)$$

$$c_p = \frac{1}{p!} (\alpha_1 + 2^p \alpha_2 + K + r^p \alpha_r) - \frac{1}{(p-1)!} (\beta_1 + 2^{p-1} \beta_2 + K + r^{p-1} \beta_r)$$

Dacă metoda este de ordin p atunci

$$\begin{cases} c_1 = c_2 = K = c_p = 0, \\ c_{p+1} \neq 0. \end{cases}$$

O metodă cu pași legați este *consistentă* dacă este de ordin cel puțin 1.

Condiția de consistență impune deci ca

$$\begin{cases} \rho(1) = 0, \\ \rho'(1) = \sigma(1). \end{cases}$$

O metodă cu pași legați zero-stabilă și consistentă este convergentă.

Probleme rezolvate

Problema 1 Considerăm problema diferențială

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(t) = -y(t). \end{cases}$$

a cărei soluție exactă este $y(t) = e^{-t}$

Să se studieze convergența și stabilitatea metodei Euler.

Soluție. $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i) = y_i - h \cdot y_i = (1 - h) \cdot y_i$

Pentru convergență considerăm intervalul constant $(0, \tau)$ cu $\tau = (i + 1) \cdot h$ în care facem $h \rightarrow 0$.

Avem

$$\lim_{h \rightarrow 0} y_{i+1} = \lim_{h \rightarrow 0} (1 - h)^{\frac{\tau}{h}} = e^{-\tau}$$

relație care arată că algoritmul converge, soluția exactă fiind

$$y(t) = e^{-t}.$$

Pentru stabilitate facem $t \rightarrow \infty \Rightarrow \tau = (i + 1)h \rightarrow \infty \Rightarrow i \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = 0$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} y_{i+1} = \lim_{i \rightarrow \infty} (1 - h)^{i+1} = 0, \text{ dacă } |1 - h| < 1 \Rightarrow 0 < h < 2$$

Eroarea globală este

$$e_n = y(t_n) - y_n = e^{-t_n} - (1 - h)^n,$$

Dezvoltarea în serie Taylor în vecinătatea lui t_i este

$$y(t_{i+1}) = (1 - h) \cdot y(t_i) + \frac{h^2}{2} \cdot y''(\xi),$$

Metoda Euler se scrie

$$y_{i+1} = (1 - h) \cdot y_i,$$

de unde rezultă eroarea într-un pas

$$e_{i+1} = (1 - h) \cdot e_i + \frac{h^2}{2} \cdot e^{-(t_i + \theta \cdot h)},$$

majorată de

$$|e_{i+1}| < (1 + h) \cdot |e_i| + \frac{h^2}{2},$$

relație care scrisă succesiv pentru $i = 0, 1, K$ este

$$|e_1| \leq \frac{h^2}{2},$$

$$|e_2| \leq (1 + h) \cdot |e_1| + \frac{h^2}{2} < e^h \cdot |e_1| + \frac{h^2}{2},$$

$$|e_3| \leq (1 + h)|e_2| + \frac{h^2}{2} < e^h |e_2| + \frac{h^2}{2} < e^{2h} |e_1| + e^h \frac{h^2}{2} + \frac{h^2}{2}$$

$$|e_3| < \frac{h^2}{2} (e^{2h} + e^h + 1) = \frac{e^{3h} - 1}{e^h - 1} \frac{h^2}{2} < (e^{3h} - 1) \frac{h}{2},$$

de unde deducem prin inducție că

$$|e_{i+1}| < (e^{(i+1) \cdot h} - 1) \cdot \frac{h}{2}.$$

Problema 2 Problema diferențială cu condiții inițiale

$$y(x_0) = y_0$$

$$y' = f(x, y)$$

se rezolvă printr-o metodă cu pași separați.

a) determinați raza de stabilitate pentru o ecuație diferențială liniară

$$f(x, y) = a \cdot y$$

b) pentru ecuația diferențială $y' = ay$, $a < 0$, calculați raza de stabilitate a metodei Runge-Kutta RK_{11} , RK_{12} , RK_{22} .

Soluție. a) O metodă cu pași separați, folosită pentru integrarea problemei diferențiale cu condiții inițiale, este o relație de recurență de forma

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n, h), \text{ căreia îi corespunde ecuația caracteristică}$$

$$r^{n+1} = r^n + f(t_n, r^n, h)$$

Raza de stabilitate h_0 , pentru ecuația caracteristică, îndeplinește, pentru $n \rightarrow \infty$, h fiind fixat, condițiile

1) pentru $0 < h < h_0$, toate rădăcinile ecuației caracteristice sunt în modul < 1 .

2) pentru $\delta h_0 > 0$, cel puțin o rădăcină este, în modul > 1 , pentru $h = h_0 + \delta h_0$

b) Pentru ecuația diferențială liniară $y' = a \cdot y$, relația de recurență are forma $y_{n+1} = P(ha) y_n$, în care $P(x)$ este un polinom de grad s .

Ecuația caracteristică este $r^{n+1} = P(ha)r^n$ sau

$$r^n(r - P(ha)) = 0$$

și are ca rădăcini pe $r = 0$ și $r = P(ha)$.

Condiția de stabilitate impune, pentru $n \rightarrow \infty$ ca $|P(ha)| < 1$.

Pentru ecuația de mai sus, metoda Runge-Kutta de ordin 1 și rang $q - R_{1q}$ are forma

$$y_{n+1} = \left[1 + ha + \sum_{k=2}^q c_k \cdot (h \cdot a)^k \right] y_n$$

Pentru $q = 1$, RK_{11} , $P(ha) = 1 + h \cdot a$.

Condiția de stabilitate impune ca

$|1 + ha| < 1 \Rightarrow -2 < ha < 0$, de unde rezultă raza de stabilitate $R = -\frac{2}{a}$ (posibil, întrucât $a < 0$).

Pentru $q = 2$, RK_{12} , $P(ha) = 1 + ha + c_2 \cdot (ha)^2$, iar condiția de stabilitate impune

$$|1 + ha + c_2(ha)^2| < 1$$

care se scrie

$$\begin{cases} 2 + ha + c_2(ha)^2 > 0 \\ ha \cdot (1 + c_2 ha) < 0 \end{cases}$$

și ne conduce la

$$-\frac{2}{(ha)^2} - \frac{1}{ha} < c_2 < -\frac{1}{ha}$$

Pentru $q = 2$, $p = 2$, RK_{22} , $P(ha) = 1 + ha + \frac{(ha)^2}{2}$, care ne conduce la condițiile de stabilitate

$$\begin{cases} 2 + ha + \frac{(ha)^2}{2} > 0 \\ ha \cdot \left(1 + \frac{ha}{2}\right) < 0 \end{cases} \Rightarrow ha > -2$$

Raza de stabilitate este deci $R = -\frac{2}{a}$

Problema 3 Pentru problema diferențială

$$\begin{aligned} y(t_0) &= y_0 \\ y' &= f(y, t) \end{aligned}$$

se consideră formula aproximativă de integrare

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot (\alpha_1 y'_{i+1} + \alpha_0 y'_i) + h^2 (\beta_1 y''_{i+1} + \beta_0 y''_i)$$

Determinați $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$, astfel încât formula să aibă gradul de valabilitate cel mai ridicat. Care este expresia erorii într-un pas.

Soluție. Impunem ca formula să fie exactă pentru $f(y, t) = 1, t, t^2, t^3$. Coeficienții $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ sunt independenți de h și t , deci putem alege, pentru simplificarea calculelor $h = 1, t_i = 0$

Pentru $f(y, t) = 1$ obținem $t_{i+1} = t_i + h \cdot (\alpha_1 + \alpha_0)$ și ecuația $\alpha_1 + \alpha_0 = 1$,
Valoarea $f(y, t) = t$ ne permite să scriem

$$\frac{t_{i+1}^2}{2} = \frac{t_i^2}{2} + h(\alpha_1 t_{i+1} + \alpha_0 t_i) + h^2(\beta_1 + \beta_0) \text{ și } \alpha_1 + \beta_1 + \beta_0 = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} \text{Luând } f(y, t) = t^2 \text{ avem } \frac{t_{i+1}^3}{3} &= \frac{t_i^3}{3} + h(\alpha_1 t_{i+1}^2 + \alpha_0 t_i^2) + 2 \cdot h^2(\beta_1 t_{i+1} + \beta_0 t_i) \quad \text{și} \\ \alpha_1 + 2 \cdot \beta_1 &= \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cu } (y, t) = t^3 \text{ obținem } \frac{t_{i+1}^4}{4} &= \frac{t_i^4}{4} + h \cdot (\alpha_1 t_{i+1}^3 + \alpha_0 t_i^3) + 3 \cdot h^2 \cdot (\beta_1 t_{i+1}^2 + \beta_0 t_i^2) \text{ și} \\ \alpha_1 + 3 \cdot \beta_1 &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Se obțin soluțiile } \alpha_0 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \beta_0 = \frac{1}{12}, \quad \beta_1 = -\frac{1}{12}.$$

care înlocuite în formula de integrare ne dau

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot (y'_{i+1} + y'_i) + \frac{h^2}{12} \cdot (-y''_{i+1} + y''_i).$$

Formula este exactă pentru polinoame până la ordinul 4 inclusiv. Eroarea metodei este de ordinul 5.

Problema 4 Metoda explicită Adams de ordin r este

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h \cdot \sum_{j=0}^r \beta_{rj} \cdot f_{i-j} \text{ sau} \\ \rho(E) y_{i-r} - h \cdot \sigma(E) f_{i-r} &= 0 \text{ în care} \\ \rho(z) &= z^r \cdot (z - 1) \\ \sigma(z) &= \sum_{j=0}^r \beta_{rj} \cdot z^{r-j} \end{aligned}$$

Calculați coeficienții formulei de integrare în cazul $r=2$

Soluție. Pentru $r=2$ ecuația Adams are forma

$$y_{i+1} = y_i + h(\beta_0 f_i + \beta_1 f_{i-1} + \beta_2 f_{i-2})$$

Impunem condiția ca formula să fie exactă pentru

$$f = t^k, \quad k = 0 : 2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{t^{k+1}}{k+1}$$

Înlocuim în formula de integrare

$$\frac{t_{i+1}^{k+1} - t_i^{k+1}}{k+1} = h(\beta_0 t_i^k + \beta_1 t_{i-1}^k + \beta_2 t_{i-2}^k), \quad k = 0 : 2$$

Întrucât formulele sunt independente de h și t_i , vom lua, pentru a reduce volumul de calcule, fără a pierde din generalitate $h = 1$, $t_i = 0$ (prin urmare

$t_{i-2} = -2$, $t_{i-1} = -1$, $t_{i+1} = 1$). Obținem sistemul de ecuații

$$k = 0 : \quad \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 1$$

$$k = 1 : \quad -\beta_1 - 2\beta_2 = \frac{1}{2}$$

$$k = 2 : \quad \beta_1 + 2^2\beta_2 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Sistemul are soluția } \beta_0 = \frac{23}{12} \quad \beta_1 = -\frac{4}{3} \quad \beta_2 = \frac{5}{12}$$

Problema 5 Se consideră ecuația recurentă

$$y(x+n) + a_{n-1}y(x+n-1) + K + a_0y(x) = b(x)$$

scrisă sub forma

$$(E^n + a_{n-1}E^{n-1} + K + a_0I) y(x) = b(x)$$

$$P_n(E) y(x) = b(x)$$

Se definește ecuația caracteristică $P_n(r) = 0$

a) Să se arate că dacă ecuația caracteristică are rădăcini simple $r_1, r_2, \dots, r_n$, soluția generală a ecuației recurente omogene are forma

$$y(x) = C_1 r_1^x + C_2 r_2^x + K + C_n r_n^x$$

b) Să se arate că dacă polinomul caracteristic are rădăcina r_1 cu multiplicitatea k , atunci

$$y(x) = p_{k-1}(x)r_1^x + C_2 r_2^x + K + C_{n-k} r_{n-k}^x$$

Soluție. a) Se caută $y(x)$ de forma $y(x) = r^x$

$$P_n(E) y(x) = r^{x+n} + a_{n-1} \cdot r^{x+n-1} + K + a_0 \cdot r^x =$$

$$r^x (r^n + a_{n-1}r^{n-1} + K + a_0)$$

$$P_n(E) r^x = r^x \cdot P_n(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad P_n(r) = 0$$

Fie r_1, r_2, K, r_n rădăcinile, atunci

$$y_1 = r_1^x, y_2 = r_2^x, K, y_n = r_n^x, \text{ și soluția ecuației omogene se exprimă ca}$$

$$y(x) = C_1 r_1^x + C_2 r_2^x + K + C_n r_n^x$$

b) $P_n(r) = (r - r_1)^k \cdot P_{n-k}(r)$.

Se ia $u(x) = v(x) \cdot r_1^x$ și se obține

$$P_n(E) u(x) = P_n(E)v(x)r_1^x = \sum_{s=0}^n a_s E^s v(x)r_1^x = \sum_{s=0}^n r_1^{x+s} a_s v(x+s)$$

$$= r_1^x \sum_{s=0}^n a_s (r_1 E)^s v(x) = r_1^x P_n(r_1 E) v(x)$$

Folosim operatorul diferență progresivă (sau diferență înainte) $\Delta = E - I$, definit în capitolul 4

$$P_n(r_1 E) v(x) = (E - I)^k P_{n-k}(r_1 E) v(x) = [\Delta^k P_{n-k}(r_1(I + \Delta))] v(x) = 0$$

$$[\Delta^k + \alpha_1 \Delta^{k-1} + K + \alpha_{n-k} \Delta^n] v(x) = 0$$

Dacă alegem $v(x) = x, x^2, K, x^{r-1}$ atunci $\Delta^r v(x) = 0$.

Așadar $y_2(x) = x r_1^x, K, y_k(x) = x^{k-1} r_1^x$

Problema 6 Pentru integrarea ecuației diferențiale

$$y(x_0) = y_0,$$

$$y' = f(x, y).$$

metoda de integrare (A, B) (sau (p, σ)) este

$$A(E) y_1 - h \cdot B(E) f_1 = 0,$$

unde $A(z) \in \Pi_p$, $B(z) \in \Pi_q$, $p \geq q$.

a) care sunt condițiile pentru ca această metodă să aibă ordinul k

b) Să se scrie condițiile de convergență, în funcție de $A(z)$ și $B(z)$.

Soluție. Explicităm polinoamele

$$A(z) = \sum_{j=0}^p \alpha_j z^j, \quad B(z) = \sum_{j=0}^q \beta_j z^j, \quad p \geq q$$

Metoda de integrare este de ordinul k dacă

$$A(E) y(t) - hB(E) y'(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j h^j y^{(j)}(t)$$

care se dezvoltă

$$\sum_{j=0}^p \alpha_j E^j y(t) - h \cdot \sum_{j=0}^q \beta_j E^j y'(t) = c_0 y(t) + c_1 h y'(t) + c_2 h^2 y''(t) + K$$

$$\alpha_0 y(t) + \alpha_1 y(t+h) + K + \alpha_p y(t+ph) - h \cdot [\beta_0 y'(t) + K + \beta_q y'(t+qh)] =$$

$$c_0 \cdot y(t) + c_1 \cdot h \cdot y'(t) + c_2 \cdot h^2 y''(t) + K$$

Identificăm coeficienții cu aceeași putere, pentru $y(t) \in \Pi_j$. Pentru a reduce volumul de calcule, vom lua, fără a reduce generalitatea pasul $h = 1$ și $t_0 = 0$. Obținem relațiile

$$y(t) = 1 \quad \alpha_0 + \alpha_1 + K + \alpha_p = c_0 = A(1),$$

$$y(t) = t \quad \alpha_1 + 2\alpha_2 + K + p\alpha_p - (\beta_0 + \beta_1 + K + \beta_q) = c_1 = A'(1) - B(1)$$

$$y(t) = \frac{t^2}{2} \quad \frac{1}{2} \cdot (\alpha_1 + 2^2\alpha_2 + K + p^2\alpha_p) - \frac{1}{1!} \cdot (\beta_1 + 2\beta_2 + K + q\beta_q) = c_2$$

...

$$y(t) = \frac{t^j}{j!} \quad \frac{1}{j!} (\alpha_1 + 2^j\alpha_2 + K + p^j\alpha_p) - \frac{1}{(j-1)!} (\beta_1 + 2^{j-1}\beta_2 + K + q^{j-1}\beta_q) = c_j$$

Metoda este de ordinul k dacă termenii din cele două dezvoltări coincid până la gradul k inclusiv, adică dacă

$$c_0 = A(1) = 0,$$

$$c_1 = A'(1) - B(1) = 0,$$

$$c_k = 0,$$

$$c_k \neq 0.$$

b) Pentru a fi convergentă, o metodă (A, B) trebuie să fie stabilă, ceea ce impune ca ecuația caracteristică $A(z) = 0$ să aibă rădăcinile z_i , în modul, subunitare, adică $|z_i| \leq 1$.

Metoda trebuie să fie, cel puțin de ordin 1, adică $c_0 = c_1 = 0$, care conduc la

Problema 7 Fie ecuația diferențială $y'' = f(t, y)$ și metoda de integrare $A(E) y_1 - h^2 \cdot B(E) f_1 = 0$, cu $A(z) \in \Pi_p$, $B(z) \in \Pi_q$, $p \geq q$. Arătați că

a) o condiție necesară de convergență este ca rădăcinile $A(z) = 0$ să fie $|z_i| < 1$, și $|z_i| = 1$ să aibă multiplicitatea cel mult 2.

b) fie o metodă de integrare (A, B) stabilă și convergentă. Să se arate că $A(1) = 0$, $A''(1) = 2 \cdot B(1)$.

Soluție. Procedăm ca în cazul problemei 6

$$A(E) y(t) - h^2 \cdot B(E) y''(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \cdot h^j \cdot y^{(j)}(t)$$

Obținem relațiile

$$C_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + K + \alpha_p,$$

$$C_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + K + p\alpha_p,$$

$$C_j = \frac{1}{j!} \cdot (\alpha_1 + 2^j \alpha_2 + K + p^j \alpha_p) - \frac{1}{(j-2)!} \cdot (\beta_1 + 2^{j-2} \beta_2 + K + q^{j-2} \beta_q).$$

Metoda este de ordin k dacă $C_j = 0$, $j = 0 : k + 1$, $C_{k+2} \neq 0$.

Metoda (A, B) de ordin 2 este

$$A(E) y(t) - h^2 B(E) y''(t) = C_3 h^3 y^{(3)}(t) + o(h^4)$$

pentru care

$$C_0 = A(1) \quad A(1) = 0$$

$$C_1 = A'(1) \quad A'(1) = 0$$

$$C_2 = \frac{A''(1)}{2} - B(1) \quad A''(1) = 2B(1)$$

Problema 8 Determinați coeficienții metodei Adams-Bashforth, astfel încât aceasta să aibă gradul de valabilitate 4.

Soluție. Formula Adams-Bashforth este $y_p = y_{p-1} + h \sum_{i=0}^q \beta_i f_{p-i}$

Impunem ca formula să fie exactă pentru $y = 1, x, x^2, x^3, x^4$ și luăm, fără a pierde din generalitate $x_{k-r} = 0$, K , $x_k = r$. Obținem

$$y = 1, \quad f = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = 1,$$

$$y = x, \quad f = 1 \quad \Rightarrow \quad r + 1 = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3,$$

$$y = x^2, \quad f = 2x \Rightarrow (r+1)^2 = r^2 + 2(r\beta_0 + (r-1)\beta_1 + (r-2)\beta_2 + (r-3)\beta_3)$$

$$y = x^3, \quad f = 3x^2 \Rightarrow (r+1)^3 = r^3 + 3(r^2\beta_0 + (r-1)^2\beta_1 + (r-2)^2\beta_2 + (r-3)^2\beta_3)$$

$$y = x^4, \quad f = 4x^3 \Rightarrow (r+1)^4 = r^4 + 4(r^3\beta_0 + (r-1)^3\beta_1 + (r-2)^3\beta_2 + (r-3)^3\beta_3).$$

care ne conduc la sistemul

$$\begin{cases} \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1 \\ \beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 = -\frac{1}{2} \\ \beta_1 + 2^2\beta_2 + 3^2\beta_3 = \frac{1}{3} \\ \beta_1 + 2^3\beta_2 + 3^3\beta_3 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

cu soluțiile

$$\beta_0 = \frac{55}{24}, \quad \beta_1 = -\frac{53}{24}, \quad \beta_2 = \frac{37}{24}, \quad \beta_3 = -\frac{3}{8}.$$

Probleme propuse

Problema 1 Scrieți un algoritm pentru rezolvarea problemei diferențiale cu condiții inițiale, folosind metoda Euler-Cauchy.

Problema 2 Se consideră sistemul de ecuații diferențiale

$$\begin{aligned} y'_1(x) &= f_1(x, y_1(x), y_2(x)), & y_1(x_0) &= \lambda_1, \\ y'_2(x) &= f_2(x, y_1(x), y_2(x)), & y_2(x_0) &= \lambda_2. \end{aligned}$$

Scrieți relațiile Runge-Kutta 44 corespunzătoare.

Problema 3 Considerăm problema diferențială cu condiții inițiale

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \\ y' &= f(x, y). \end{aligned}$$

Notăm $y_i = y(x_i)$, $x_{i+1} = x_i + h$.

Fie formula de integrare

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \alpha_0 \cdot K_0 + \alpha_1 \cdot K_1, \\ K_0 &= h \cdot f(x_i, y_i), \\ K_1 &= h \cdot f(x_i + \lambda \cdot h, y_i + \lambda \cdot K_0). \end{aligned}$$

a) Determinați α_0 și α_1 astfel încât formula să aibă gradul de valabilitate cât mai ridicat.

b) Calculați expresia erorii într-un pas

c) studiați cazurile particulare $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$, $\lambda = \frac{2}{3}$.

Problema 4 Scrieți o funcție care implementează metoda predictor-corrector folosind relațiile

$$\begin{aligned} y_{i+1}^p &= y_{i-3} + \frac{4}{3} h(2f_{i-2} - f_{i-1} + f_i), \\ y_{i+1}^c &= y_{i-1} + \frac{h}{3} (f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}^p). \end{aligned}$$

Problema 5 Care este gradul de valabilitate al formulelor

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{12} (23f_k - 16f_{k-1} + 5f_{k-2}), \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{24} \cdot (55 \cdot f_k - 59 \cdot f_{k-1} + 37 \cdot f_{k-2} - 9 \cdot f_{k-3}). \end{aligned}$$

Problema 6 Pentru problema diferențială cu condiții inițiale

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_i) = y_i, \quad i = 0 : q - 1, \quad x_i = x_0 + \frac{a}{N} \cdot i. \end{cases}$$

se consideră formula de integrare explicită

$$y_p = y_{p-1} + h \sum_{i=1}^q \beta_i f_{p-i}, \text{ unde } f_{p-i} = f(x_{p-i}, y_{p-i}).$$

Să se arate că impunând condițiile ca formula de integrare să aibă gradul de valabilitate r , se obțin restricțiile

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{q-1} (q-i)^{k-1} \cdot \beta_i &= \frac{q^k - (q-1)^k}{k}, \\ \sum_{i=1}^q \beta_i &= 1, \quad k = 2 : r. \end{aligned}$$