

Acest document este similar secțiunii 2.7 din Cristian Giumale, "Introducere în analiza Algoritmilor", conținutul fiind extins cu:

1. Specificarea formală a tipului T_{Ring}
2. Verificarea corectitudinii specificației T_{Ring}
3. Verificarea implementării tipului T_{Ring} ca o pereche de liste T_{List}
4. Rescrierea Haskell a specificației T_{Ring} și implementarea
5. $T_{Ring} = Abs_D(T_{List}, T_{List})$
6. Dezvoltarea unui algoritm corect pentru sortarea unei liste de chei folosind un inel.

2.7 Analiză amortizată

Tehnica de analiză a complexității, așa cum a fost discutată în secțiunile precedente, nu ține seama de posibila comportare neuniformă a algoritmului studiat. Analiza este realizată punctual, pentru un singur pachet de date, și, de regulă, pentru cazul cel mai defavorabil. Este însă posibil ca un algoritm să fie ineficient în cazurile defavorabile, dar performant în celelalte cazuri. Dacă situațiile defavorabile apar relativ rar, atunci pe ansamblu, pentru o mulțime de pachete de date, algoritmul poate avea o comportare acceptabilă, iar costul secvenței de operații efectuate de algoritm poate rezulta scăzut. Astfel, devine interesant studiul costurilor secvențelor posibile de operații ce pot fi efectuate de algoritm, cu condiția ca secvențele să acopere cazurile defavorabile. Analiza complexității amortizate (sau pe scurt analiza amortizată) a unui algoritm are exact acest scop: determinarea marginii superioare a costului unei secvențe oarecare de operații și, totodată, calculul costului mediu al operațiilor algoritmului.

Costul mediu $\text{cost}_a(\text{op})$ al unei operații op , calculat pentru o secvență oarecare S de operații ce acoperă cazurile cele mai defavorabile, se numește *cost amortizat* al operației, iar suma $\sum_{\text{op} \in S} \text{cost}_a(\text{op})$ este o margine superioară a costului secvenței S .

2.7.1 Inel unidirecțional

Ca bază pentru discutarea metodelor de analiză amortizată, se alege un inel unidirecțional cu elemente de tip T . Un inel nevid este caracterizat printr-un vârf ce poate fi deplasat prin inel element cu element astfel încât doar elementul de la vârf al inelului este accesibil. Evident, după parcurgerea tuturor elementelor din inel, vârfurile ajunge în poziția inițială. Considerăm că operațiile inelului sunt:

- $\text{void} \rightarrow T \text{ Ring}$ construiește inelul vid.
- $\text{ins}: T \times T \text{ Ring} \rightarrow T \text{ Ring}$. $\text{ins}(e, R)$ inserează elementul e la vârf al inelului R .
- $\text{del}: T \text{ Ring} \setminus \{\text{void}\} \rightarrow T \text{ Ring}$. $\text{del}(R)$ elimină elementul de la vârf al inelului nevid R . Vârfurile este poziționat pe următorul element, dacă acesta există.
- $\text{top}: T \text{ Ring} \setminus \{\text{void}\} \rightarrow T$. $\text{top}(R)$ este elementul de la vârf al inelului nevid R .
- $\text{move}: T \text{ Ring} \setminus \{\text{void}\} \rightarrow T \text{ Ring}$. Prin $\text{move}(R)$ vârfurile inelului nevid R este deplasat spre dreapta, peste elementul curent.
- $\text{empty}: T \text{ Ring} \rightarrow \text{bool} = \{0, 1\}$. $\text{empty}(R)$ testează dacă inelul R este vid.

Descrierea informală de mai sus corespunde următoarei specificații algebrice a tipului $T \text{ Ring}$.

```

T Ring ::= void | ins(T, T Ring)

empty: T Ring → bool
top: T Ring \ {void} → T
del: T Ring \ {void} → T Ring
move: T Ring \ {void} → T Ring

(1) empty(void) = 1
(2) empty(ins(e, X)) = 0
(3) top(ins(e, X)) = e
(4) del(ins(e, X)) = X
(5) move(ins(e, void)) = ins(e, void)
(6) move(ins(e, ins(e', X))) = ins(e', move(ins(e, X)))

```

Cum verificăm dacă specificația corespunde într-adevăr unui inel unidirecțional? Cu alte cuvinte, cum putem proba corectitudinea specificației? O posibilitate constă în alegerea unei proprietăți reprezentative inelului și în a o verifica folosind specificația. De exemplu, $\forall i \in \mathbb{N}, X \in T \text{ Ring} \mid \neg \text{empty}(X) \bullet \text{top}(\text{move}^i(X)) = \text{element}(i, X)$, unde $\text{move}^i(X)$ reprezintă aplicarea de i ori a operației move pornind cu inelul X , $\text{element}(i, X)$ reîntoarce elementul i modulo $\text{size}(X)$ din X , iar $\text{size}(X)$ reîntoarce numărul elementelor din X . Un asemenea exercițiu este efectuat în secțiunea 2.4.5.

Inelul poate fi implementat ca o listă circulară, iar prelucrarea este banală dacă limbajul de programare folosit lucrează direct cu pointerii din celulele listei. În acest caz toate operațiile sunt în $\Theta(1)$. Să considerăm însă că limbajul de programare folosit nu lucrează în mod direct cu pointeri ci dispune de tipul τ *List* (listă unidirecțională cu elemente de tip τ), cu operatorii și specificația formală de mai jos, unde:

- *nil* este lista vidă.
- *cons*(*e*, *L*) construiește din lista *L* o listă care are ca prim element *e*.
- *head*(*L*) reîntoarce elementul de la vârful listei nevide *L*.
- *tail*(*L*) reîntoarce lista rezultată prin decuparea elementului de la vârful lui *L*.
- *null*(*L*) testează dacă lista *L* este vidă.

τ <i>List</i> ::= <i>nil</i> <i>cons</i> (τ , τ <i>List</i>)
<i>head</i> : τ <i>List</i> \ { <i>nil</i> } $\rightarrow \tau$ <i>tail</i> : τ <i>List</i> \ { <i>nil</i> } $\rightarrow \tau$ <i>List</i> <i>null</i> : τ <i>List</i> $\rightarrow$ <i>bool</i>
(1L) <i>head</i> (<i>cons</i> (<i>e</i> , <i>L</i>)) = <i>e</i> (2L) <i>tail</i> (<i>cons</i> (<i>e</i> , <i>L</i>)) = <i>L</i> (3L) <i>null</i> (<i>nil</i>) = 1 (4L) <i>null</i> (<i>cons</i> (<i>e</i> , <i>L</i>)) = 0

O implementare posibilă a tipului τ *Ring* folosind tipul τ *List* consideră un inel nevid ca abstractizarea $\text{Abs}_p\langle L, R \rangle$ a unei perechi $\langle L, R \rangle$ de liste unidirecționale *L* și *R*. Lista *R* conține elementele din inel situate între vârful curent și "ultimul" element al inelului, iar *L* conține elementele, aranjate în ordine inversă, aflate între poziția inițială și poziția curentă a vârfului inelului. Inelul vid este abstractizat prin $\text{Abs}_p\langle \text{nil}, \text{nil} \rangle$. Reprezentarea este ilustrată în figura 2.8.

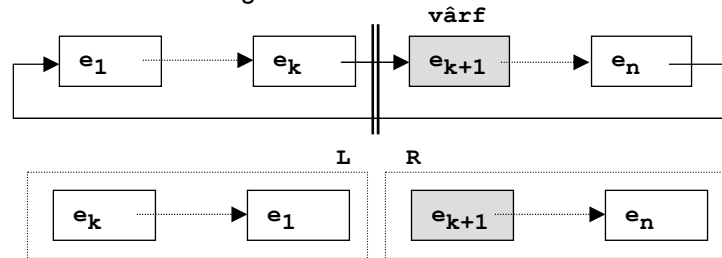


Figura 2.8 Un inel unidirecțional reprezentat prin două liste unidirecționale

Fie inelul $x = \text{Abs}_p\langle L, R \rangle$. Convenim ca lista *R* să fie vidă doar dacă inelul *x* este vid. O astfel de reprezentare a inelului o vom numi normalizată și poate fi obținută prin operația:

(norm) $\text{normalize}\langle L, R \rangle = \text{if } \text{null}(R) \text{ then } \langle \text{nil}, \text{reverse}(L) \rangle \text{ else } \langle L, R \rangle$

unde operația *reverse*(*L*) construiește inversa listei *L*. Dacă inversarea unei liste este fi definită conform axiomelor

```
reverse(L) = rev(L,nil), CU rev(nil,R) = R
rev(cons(e,L),R) = rev(L,cons(e,R)),
```

atunci complexitatea operației `reverse(L)` este $\Theta(n)$, n fiind numărul de elemente din lista L . Așadar, în cazul cel mai defavorabil, complexitatea operației `normalize(L,R)` este proporțională cu numărul de elemente din inelul $Abs_p(L,R)$.

Operațiile inelului presupun un inel cu reprezentare normalizată și conduc la un inel cu reprezentare normalizată, fiind implementate conform ecuațiilor următoare, numite axiome de implementare:

```
(1i) void = Abs_p(nil,nil)
(2i) ins(e,Abs_p(L,R)) = Abs_p(L,cons(e,R))
(3i) del(Abs_p(L,R)) = Abs_p(normalize(L,tail(R)))
(4i) move(Abs_p(L,R)) = Abs_p(normalize(cons(head(R),L),tail(R)))
(5i) top(Abs_p(L,R)) = head(R)
(6i) empty(Abs_p(L,R)) = null(R)
```

Este interesant de observat că funcția Abs_p este definită peste clase de echivalență ale perechilor $\langle L,R \rangle$. Într-adevăr, în cursul prelucrărilor, se pot obține implementări diferite – dar echivalente – ale aceluiași inel. Spunem că reprezentarea $\langle L,R \rangle$ este echivalentă cu reprezentarea $\langle L',R' \rangle$ a unui inel, cu alte cuvinte spunem că $Abs_p(L,R)$ și $Abs_p(L',R')$ reprezintă același inel și scriem $Abs_p(L,R) = Abs_p(L',R')$, dacă $R @ (reverse L) = R' @ (reverse L')$, unde $@$ reprezintă concatenarea listelor. Dacă z și w sunt valori de tipul τ_List , iar e este un element de tip τ , concatenarea poate fi implementată conform axiomelor:

```
nil @ Z = Z
cons(e,W) @ Z = cons(e, W @ Z)
```

Folosind relația de echivalență

$$Abs_p(L,R) = Abs_p(L',R') \Leftrightarrow R @ (reverse L) = R' @ (reverse L'),$$

se poate verifica că implementarea conformă ecuațiilor de mai sus respectă axiomele din specificarea algebrică a tipului τ_Ring , deci că implementarea este corectă. De exemplu, fie $x = Abs_p(L,R)$ și axioma

$$move(ins(e,ins(e',X))) = ins(e',move(ins(e,X)))$$

Prin rescrierea celor doi termeni ai axiomei, conform axiomelor tipurilor τ_Ring , τ_List și ecuațiilor de implementare, se ajunge la același inel.

```
move(ins(e,ins(e',X)))
= move(ins(e,ins(e',Abs_p(L,R))))
— 2i → move(ins(e,Abs_p(L,cons(e',R))))
— 2i → move(Abs_p(L,cons(e,cons(e',R))))
— 4i,1L,2L → Abs_p(normalize(cons(e,L),cons(e',R)))
— norm → Abs_p(cons(e,L),cons(e',R))
= X'
```

```

ins(e', move(ins(e, X))
    = ins(e', move(ins(e, Absp(L, R))))
— 2i → ins(e', move(Absp(L, cons(e, R))))
— 4i, 1L, 2L → ins(e', Absp(normalize(cons(e, L), R)))

```

Caz 1. $R = \text{nil}, L = \text{nil}$

```

— norm → ins(e', Absp(nil, cons(e, nil)))
— 2i → Absp(nil, cons(e', cons(e, nil)))
= x"

```

Dar, în acest caz, $x' = \text{Abs}_p(\text{cons}(e, \text{nil}), \text{cons}(e', \text{nil}))$, iar $\text{cons}(e', \text{nil}) @ \text{reverse}(\text{cons}(e, \text{nil})) = \text{cons}(e', \text{cons}(e, \text{nil}))$. Deci $x' = x''$.

Caz 2. $R \neq \text{nil}$

```

— norm → ins(e', Absp(cons(e, L), R))
— 2i → Absp(cons(e, L), cons(e', R))
= x'

```

2.7.2 Analiză de ansamblu

Costul operațiilor `del` și `move` este $O(n)$ în cazul cel mai defavorabil, unde n este lungimea inelului, dar cazul cel mai defavorabil nu apare mereu. Dificultatea stabilirii exacte a complexității operațiilor rezidă în interdependența dintre frecvența cazurilor defavorabile, când normalizarea are loc efectiv, și secvența de operații aplicate inelului. Prin urmare o asemenea complexitate exactă, absolută, este imposibil de calculat. Ce se poate calcula este costul mediu al unei secvențe oarecare de operații. Luând ca operație critică deplasarea unui element al inelului între listele L și R , un raționament posibil este următorul.

Aparent, pornind de la un inel vid, după o secvență s de m operații oarecare fiecare element din inel poate fi deplasat între L și R de cel mult $O(m)$ ori. Deplasarea $L \rightarrow R$ are loc în timpul unei normalizări, iar deplasarea $R \rightarrow L$ are loc în prima fază a unei operații `move`, înaintea eventualei normalizări. Inelul poate conține cel mult m elemente, deci costul celor m operații este $\text{cost}(s) \leq m O(m) = O(m^2)$. Prin urmare, costul amortizat al unei operații din cele m este $O(m^2)/m = O(m)$. Totuși, acest rezultat reprezintă o margine superioară mult mai largă decât cea reală. Normalizările efective, deci transferurile $L \rightarrow R$ nu au loc pentru fiecare operație din cele m . De asemenea, dacă inelul conține m elemente atunci nici o operație nu poate fi `move` sau `del`.

Pentru o estimare mai exactă a costului amortizat al operațiilor din secvența s , să observăm că numărul de deplasări $L \rightarrow R$ de elemente nu poate fi mai mare ca numărul operațiilor `move` din s . Într-adevăr, un element trebuie să fie în lista L pentru a putea fi transferat în R și numai operațiile `move` încarcă lista L . De asemenea, numărul deplasărilor $R \rightarrow L$ este egal cu numărul operațiilor `move` din s . Prin urmare, numărul total de deplasări de elemente între listele L și R ale inelului nu poate depăși dublul

numărului operațiilor din s . Costul cumulat al acestor deplasări (ca efect al operațiilor *move* și *del* din s) este $O(2m)$. La costul deplasărilor de elemente se adaugă costul inserărilor elementelor în R , ca efect al operațiilor *ins*, costul eliminărilor elementelor din R , ca efect al operațiilor *del* și costul operațiilor *top* și *empty*. Costul tuturor acestor operații este $O(m)$. Rezultă $\text{cost}(s) = O(m) + O(2m) = O(m)$, iar costul amortizat al unei operații a inelului este $O(m)/m = O(1)$.

Metoda utilizată mai sus pentru a estima costul mediu al unei operații a inelului unidirecțional poartă numele de analiză de ansamblu (în engleză metoda este întâlnită sub denumirea *aggregate method*). Se urmărește contorizarea execuțiilor tuturor suboperațiilor ce formează operațiile unei structuri de date în raport cu lungimea unei secvențe oarecare de astfel de operații. Metoda calculează un singur *cost amortizat* (cost mediu al operațiilor unei secvențe oarecare de operații care acoperă cazurile cele mai defavorabile) pentru toate operațiile unui algoritm, chiar dacă operațiile au costuri amortizate diferite.

2.7.3 Metoda creditelor

O analiză amortizată mai fină impune diferențierea costurilor diverselor operații efectuate de algoritm. O astfel de analiză poate folosi metoda creditelor (în engleză metoda este întâlnită sub denumirea *accounting method*).

Presupunem că algoritmul execută o secvență de operații s asupra unei structuri de date D . Fiecărei operații op din s i se asociază un cost amortizat $\text{cost}_a(op)$, costul real al operației fiind notat $\text{cost}(op(D))$. Valoarea $\text{cost}_a(op)$ este costul mediu al op , cost care acoperă cazurile cele mai defavorabile, în timp ce $\text{cost}(op(D))$ poate varia în funcție de istoria prelucrării și de elementele prelucrate ale structurii D . Atunci când $\text{cost}_a(op) > \text{cost}(op(D))$ diferența $\text{cost}_a(op) - \text{cost}(op(D))$ reprezintă un credit care mărește creditul $\text{credit}(e)$ deja asociat elementelor $e \in D$ implicate în operația op . Creditul este utilizat pentru a compensa costul real al acelor operații op din s care satisfac $\text{cost}(op(D)) > \text{cost}_a(op)$.

Să impunem restricția $\text{credit}(e) \geq 0$, pentru orice moment de timp în cursul operațiilor din s și pentru orice element din D . Să notăm cu $\text{credit}_f(e)$ creditul folosit pentru a compensa costul amortizat al operațiilor $op \in s$ care satisfac $\text{cost}_a(op) < \text{cost}(op(D))$, și cu $\text{credit}_c(e)$ creditul cumulat al unui element e din D , obținut în urma operațiilor $op \in s$ cu cost amortizat $\text{cost}_a(op) > \text{cost}(op(D))$. Putem scrie:

$$\sum_{e \in D} \text{credit}_c(e) - \sum_{e \in D} \text{credit}_f(e) = \sum_{op \in s} \text{cost}_a(op) - \sum_{op \in s} \text{cost}(op(D)) \geq 0$$

Astfel, se poate garanta că pentru orice secvență s de operații există inegalitatea $\text{cost}_a(s) = \sum_{op \in s} \text{cost}_a(op) \geq \sum_{op \in s} \text{cost}(op(D)) = \text{cost}(s)$, adică suma

costurilor amortizate ale operațiilor din secvență reprezintă o limită superioară a costului real al secvenței.

Pentru inelul unidirecțional costurile reale ale operațiilor `ins`, `top` și `empty` sunt $O(1)$ și, pentru simplitate, sunt considerate 1. De asemenea, considerăm 1 costul unei operații de deplasare a unui element între listele `l` și `r` ale inelului. Costul real pentru `move` depinde de starea inelului și variază între 1 și $1+n$, unde n este numărul de elemente din inel. Pentru `del` costul real este între 1 și n . Alocăm costurile amortizate:

$$\begin{aligned} \text{cost}_a(\text{void}) &= \text{cost}_a(\text{ins}) = \text{cost}_a(\text{del}) = \text{cost}_a(\text{top}) = \text{cost}_a(\text{empty}) = 1 \\ \text{cost}_a(\text{move}) &= 2 \end{aligned}$$

Să asociem fiecărui element e din inel un credit $\text{credit}(e)$ astfel încât creditul inițial să fie 0. Doar operatorii `del` și `move` pot să modifice creditul elementelor unui inel. De exemplu, după operația `move(x)` fără normalizare creditul elementului `top(x)` crește cu diferența dintre $\text{cost}_a(\text{move}) - \text{cost}(\text{move}(x))$, adică cu 1. Distribuția creditelor elementelor unui inel este precizată de invariantul:

$$I(\text{Abs}_p(L, R)) =_{\text{def}} (\forall e \in L \bullet \text{credit}(e) = 1) \wedge (\forall e \in R \bullet \text{credit}(e) = 0)$$

Invariantul arată că pentru orice element din inel creditul rămâne mereu pozitiv. În ipoteza în care operațiile ce nu modifică inelul nu modifică nici creditele elementelor, iar costurile amortizate asociate operațiilor care modifică inelul respectă invariantul, adică

$$I(\text{void}) \wedge (\forall X \in T \text{ Ring} \bullet I(X) \Rightarrow (\forall op \in \{\text{ins}, \text{del}, \text{move}\} \bullet I(\text{op}(X)))) ,$$

putem admite că, pentru orice secvență de operații și pentru orice inel, costul mediu al unei operații `op` este $\text{cost}_a(\text{op})$. Pentru constructorii `void`, `ins`, `move` și `del` demonstrația este prin inducție structurală.

Propoziția 2.6 Costurile amortizate ale constructorilor inelului $\text{Abs}_p(L, R)$ mențin invariantul $I(\text{Abs}_p(L, R))$.

Caz de bază. $x = \text{void} = \text{Abs}_p(\text{nil}, \text{nil})$, iar invariantul $I(x)$ este satisfăcut banal. În plus, $\text{cost}_a(\text{void}) = \text{cost}(\text{void})$ și deci nu există credit ce trebuie distribuit.

Pas de inducție. Să considerăm că pentru inelul $x = \text{Abs}_p(L, R)$, $R \neq \text{nil}$, cu n elemente, invariantul $I(x)$ este satisfăcut (ipoteza inductivă). Să arătăm că invariantul este satisfăcut după orice operație `ins`, `del` sau `move` aplicată lui x .

- Pentru operația `ins(e, x)` inelul devine $\text{Abs}_p(L, \text{cons}(e, R))$. Costul amortizat $\text{cost}_a(\text{ins})$ este 1 exact cât $\text{cost}(\text{ins}(e, x))$ astfel încât $\text{credit}(e) = 0$ și, conform ipotezei inductive, invariantul $I(\text{Abs}_p(L, \text{cons}(e, R)))$ este satisfăcut.

- Pentru operația `move(x)` = $\text{Abs}_p(L', R')$ fie e elementul de la vârful lui x , anume $e = \text{top}(x) = \text{head}(R)$.

Caz 1: $\text{tail}(R) \neq \text{nil}$. Operația move are o singură fază: deplasarea lui e din R în L , astfel încât $L' = \text{cons}(e, L)$ și $R' = \text{tail}(R)$. Costul real al operației $\text{move}(x)$ este 1, iar diferența $\text{cost}_a(\text{move}) - \text{cost}(\text{move}(x)) = 2 - 1 = 1$ este adăugată creditului elementului e . Conform ipotezei inductive, înaintea operației move avem $\text{credit}(e) = 0$, astfel încât $\text{credit}(e) = 1$ după $\text{move}(x)$. Invariantul $I(\text{Abs}_p(L', R'))$ este satisfăcut.

Caz 2: $\text{tail}(R) = \text{nil}$. Operația move are două faze: transferul lui e din R în L și apoi normalizarea efectivă a inelului, astfel încât $L' = \text{nil}$ și $R' = \text{reverse}(\text{cons}(e, L))$.

- Elementul e este mutat din R în L . Ca urmare a ipotezei inductive, creditul lui e devine $\text{credit}(e) = 1$, iar elementele din L au creditul 1. Invariantul $I(\text{Abs}_p(\text{cons}(e, L), \text{nil}))$ este satisfăcut după această primă fază.
- Inelul este normalizat. Toate elementele din $\text{cons}(e, L)$ sunt deplasate în R' . Costul deplasării unui element e este 1 și este suportat din creditul $\text{credit}(e) = 1$, astfel încât, odată ajuns în R' , elementul e are $\text{credit}(e) = 0$. Invariantul $I(\text{Abs}_p(\text{nil}, \text{reverse}(\text{cons}(e, L)))) = I(\text{move}(x))$ este satisfăcut.

În cazul (2) există $n-1$ elemente în lista L și un singur element în lista R , iar costul real al operației $\text{move}(x)$ este $1+n$. Deși $\text{cost}_a(\text{move}) = 2$, diferența $n-1$ este suportată din creditele elementelor aflate în L înaintea operației move .

• Pentru $\text{del}(x) = \text{Abs}_p(L', R')$, notăm $e = \text{top}(x) = \text{head}(R)$. Ca și pentru $\text{move}(x)$ există două cazuri.

Caz 1: $\text{tail}(R) \neq \text{nil}$. Operația del are o singură fază: eliminarea lui e din R . Rezultă $L' = L$ și $R' = \text{tail}(R)$. Costul real al operației $\text{del}(x)$ este 1 exact cât costul amortizat, deci nu au loc modificări de credite. Conform ipotezei inductive, invariantul $I(\text{Abs}_p(L, \text{tail}(R)))$ este satisfăcut.

Caz 2: $\text{tail}(R) = \text{nil}$. Operația del are două faze: eliminarea elementului e din R și normalizarea efectivă a inelului. Rezultă $L' = \text{nil}$ și $R' = \text{reverse}(L)$.

- Elementul e este eliminat din R . Operația costă 1 exact cât costul amortizat $\text{cost}_a(\text{del})$. Nu au loc modificări de credite și, conform ipotezei inductive, invariantul $I(\text{Abs}_p(L, \text{nil}))$ este satisfăcut.
- Inelul este normalizat. Elementele din L sunt deplasate în R' . Costul deplasării unui element e este 1 și este suportat din creditul $\text{credit}(e) = 1$, astfel încât, odată ajuns în R' , elementul e are $\text{credit}(e) = 0$. Invariantul $I(\text{Abs}_p(\text{nil}, \text{reverse}(L))) = I(\text{del}(x))$ este satisfăcut.

În cazul (2) costul real al operației $\text{del}(x)$ este n . Deși $\text{cost}_a(\text{del}) = 1$, diferența $n-1$ este suportată din creditele celor $n-1$ elemente aflate în L înaintea operației. ■

Deoarece suma creditelor elementelor din inel este întotdeauna pozitivă, rezultă că pentru o secvență oarecare s de m operații ce pleacă cu un inel $\text{vid } x$ avem:

$$\text{cost}(S) = \sum_{op \in S} \text{cost}(op(D)) \leq \sum_{op \in S} \text{cost}_a(op) \leq 2m = O(m)$$

Costul mediu al unei operații op a inelului, cost ce acoperă cazurile cele mai defavorabile, este $\text{cost}_a(op) = O(1)$, deși costul real poate varia neuniform așa cum se ilustrează în figura 2.9. Totodată, analiza complexității amortizate este independentă în raport cu starea inițială $x_0 = \text{Abs}_p(L_0, R_0)$ a inelului, cu condiția ca invariantul $I(\text{Abs}_p(L_0, R_0))$ să fie satisfăcut.

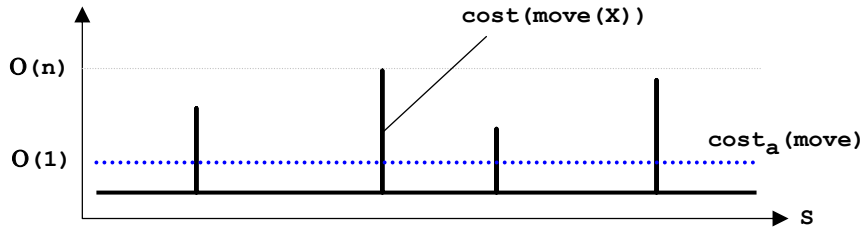


Figura 2.9 Costul real și costul amortizat pentru operația *move* (n este lungimea maximă a inelului în cursul operațiilor s)

2.7.4 Metoda potențialului

Metoda potențialului derivă din cea a creditelor prin centralizarea acestora. În loc de a asocia credite elementelor structurii de date prelucrate de algoritm, putem asocia un singur credit întregii structuri de date. În acest caz creditul joacă rolul unei energii potențiale care poate folosi pentru compensarea operațiilor mai costisitoare. Metoda rezultată este denumită metoda potențialului.

Structurii de date D i se asociază o funcție $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}_+$, care măsoară energia potențială a întregii structuri la un moment dat. Fie $s = op_1, op_2, \dots, op_m$ o secvență de m operații executate de un algoritm asupra structurii D . Fie D_0 structura inițială, înaintea aplicării operației op_1 , și D_i structura rezultată după aplicarea primelor i operații asupra lui D_0 . De asemenea, notăm cu Φ_i energia potențială a lui D_i .

$$D_i =_{\text{def}} op_i(op_{i-1}(\dots op_1(D_0) \dots)) = op_i(D_{i-1}), i=1, m$$

$$\Phi_i =_{\text{def}} \Phi(D_i), i=0, m$$

Fie $\text{cost}(op_i)$ costul real al operației $op_i(D_{i-1})$, iar $\text{cost}_a(op_i)$ costul amortizat al operației op_i relativ la Φ , cost definit prin:

$$\text{cost}_a(op_i) =_{\text{def}} \text{cost}(op_i) + \Phi_i - \Phi_{i-1}, i=1, m$$

Costul amortizat al operației $op_i(D_{i-1})$ adaugă costului real variația de potențial a structurii de date D , variație indusă de operație. Însumând, obținem:

$$\sum_{i=1}^m \text{cost}_a(\text{op}_i) = \sum_{i=1}^m (\text{cost}(\text{op}_i) + \Phi_i - \Phi_{i-1}) = \sum_{i=1}^m \text{cost}(\text{op}_i) + \Phi_m - \Phi_0$$

Dacă $\Phi_m \geq \Phi_0$ atunci $\sum_{i=1}^m \text{cost}_a(\text{op}_i) \geq \sum_{i=1}^m \text{cost}(\text{op}_i)$ și, deoarece costul secvenței s este suma costurilor operațiilor din s , rezultă

$$\text{cost}(S) \leq \sum_{i=1}^m \text{cost}_a(\text{op}_i) = \text{cost}_a(S).$$

Dorim păstrarea inegalității $\text{cost}(S) \leq \text{cost}_a(S)$ pentru orice secvență s , implicit, pentru orice m și impunem inegalitatea $\Phi_i \geq \Phi_0$ pentru orice i . Cu alte cuvinte, energia potențială a structurii D la un moment diferit celui inițial trebuie să fie mai mare decât energia inițială. Pentru cazul particular $\Phi_0=0$, este necesar ca $\Phi_i \geq 0$. Această ultimă inegalitate este naturală, din moment ce energia nu poate fi consumată în lipsă.

Ca exemplu, să reconsiderăm inelul unidirecțional reprezentat printr-o pereche de liste, ca în figura 2.8. Definim funcția Φ asociată inelului $x = \text{Abs}_P(L, R)$ prin $\Phi(x) = \#L$, unde $\#L$ desemnează numărul de elemente din lista L . Funcția de potențial respectă restricțiile:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= 0 \text{ pentru un inel vid } x = \text{Abs}_P(\text{nil}, \text{nil}) \\ \Phi(x) &\geq 0 \text{ pentru un inel oarecare } x = \text{Abs}_P(L, R) \end{aligned}$$

Putem calcula acum costurile amortizate ale operațiilor ce modifică inelul x . Suma acestor costuri pentru o secvență de operații s , aplicată pe un inel inițial vid (sau pe un inel cu $\#L=0$), constituie o margine superioară a costului real al secvenței. Notăm $x_i = \text{Abs}_P(L_i, R_i)$ inelul x obținut după a i -a operație din secvența s .

- Presupunând că ins este a i -a operație din secvența de operații s executate asupra inelului x , anume $x_i = \text{ins}(e, x_{i-1})$, avem: $\text{cost}(\text{ins}(e, x_{i-1})) = 1$, $x_i = \text{Abs}_P(L_{i-1}, \text{cons}(e, R_{i-1}))$, și $\Phi_i = \#L_i = \#L_{i-1} = \Phi_{i-1}$. Rezultă,

$$\text{cost}_a(\text{ins}) = \text{cost}(\text{ins}(e, x_{i-1})) + \Phi_i - \Phi_{i-1} = 1$$

- Presupunând că move este a i -a operație din secvența de operații s , anume $x_i = \text{move}(x_{i-1})$, există două cazuri posibile.

Caz $\#R_{i-1} > 1$. Operația $\text{move}(x_{i-1})$ constă în transferul primului element din R_{i-1} astfel încât $L_i = \text{cons}(\text{top}(R_{i-1}), L_{i-1})$ și $R_i = \text{tail}(R_{i-1})$.

$$\begin{aligned} \text{cost}(\text{move}(x_{i-1})) &= 1 \\ \Phi_i &= \#L_i = \#L_{i-1} + 1 \\ \Phi_{i-1} &= \#L_{i-1} \\ \text{cost}_a(\text{move}) &= \text{cost}(\text{move}(x_{i-1})) + \Phi_i - \Phi_{i-1} = 2 \end{aligned}$$

Caz $\#R_{i-1} = 1$. După transferul unicului element $e = \text{top}(R_{i-1})$ din R_{i-1} are loc normalizarea efectivă a inelului $x' = \text{Abs}_p(\text{cons}(e, L_{i-1}), \text{nil})$. Rezultă, $\text{Abs}_p(L_i, R_i) = \text{Abs}_p(\text{nil}, \text{reverse}(\text{cons}(e, L_{i-1})))$. Normalizarea inelului x' costă $\#L_{i-1} + 1$.

$$\text{cost}(\text{move}(X_{i-1})) = 1 + \text{cost_normalizare}(X') = 1 + \#L_{i-1} + 1$$

$$\Phi_i = \#L_i = \#\text{nil} = 0$$

$$\Phi_{i-1} = \#L_{i-1}$$

$$\text{cost}_a(\text{move}) = \text{cost}(\text{move}(X_{i-1})) + \Phi_i - \Phi_{i-1} = 2$$

• Presupunând că del este a i -a operație din secvența de operații s , anume $x_i = \text{del}(X_{i-1})$, există două cazuri posibile.

Caz $\#R_{i-1} > 1$. Operația $\text{del}(X_{i-1})$ se limitează la eliminarea primului element din R_{i-1} . Lista L_{i-1} nu este modificată.

$$\text{cost}(\text{del}(X_{i-1})) = 1$$

$$\Phi_i = \#L_i = \#L_{i-1}$$

$$\Phi_{i-1} = \#L_{i-1}$$

$$\text{cost}_a(\text{del}) = \text{cost}(\text{del}(X_{i-1})) + \Phi_i - \Phi_{i-1} = 1$$

Caz $\#R_{i-1} = 1$. După eliminarea unicului element din R_{i-1} are loc normalizarea inelului $x' = \text{Abs}_p(L_{i-1}, \text{nil})$ astfel încât $\text{Abs}_p(L_i, R_i) = \text{Abs}_p(\text{nil}, \text{reverse}(L_{i-1}))$. Normalizarea inelului x' costă $\#L_{i-1}$.

$$\text{cost}(\text{del}(X_{i-1})) = 1 + \text{cost_normalizare}(X') = 1 + \#L_{i-1}$$

$$\Phi_i = \#L_i = \#\text{nil} = 0$$

$$\Phi_{i-1} = \#L_{i-1}$$

$$\text{cost}_a(\text{del}) = \text{cost}(\text{del}(X_{i-1})) + \Phi_i - \Phi_{i-1} = 1$$

Pentru operațiile $op \in \{\text{top}, \text{empty}\}$, care nu modifică inelul și, implicit, conservă potențialul Φ , avem $\text{cost}_a(op) = \text{cost}(op) = 1$. În ceea ce privește cazul particular void , se asigură $\Phi(\text{void}) = 0$, iar $\text{cost}_a(\text{void}) = \text{cost}(\text{void}) = 1$.

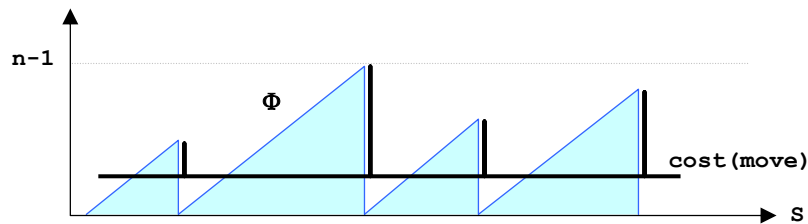


Figura 2.10 Costul real al operației `move` și variația potențialului inelului n este lungimea maximă a inelului în cursul operațiilor s

În figura 2.10 este ilustrată variația potențialului inelului în cursul unei secvențe s de operații asupra unui inel cu cel mult n elemente. Curba Φ este în dinți de fierăstrău. Potențialul Φ crește pentru fiecare operație `move` care nu conduce la normalizarea inelului. Pentru o operație `move` urmată de normalizarea inelului Φ cade

la 0, energia acumulată fiind folosită pentru deplasarea elementelor inelului din lista L în R . Inițial, pentru inelul vid $\Phi=0$.

S-au obținut aceleași costuri amortizate ca și în cazul analizei bazate pe credite. Deoarece $\text{cost}_a(\text{op}) = O(1)$ pentru orice $\text{op} \in \{\text{void}, \text{ins}, \text{del}, \text{move}, \text{top}, \text{empty}\}$, costul oricărei secvențe s de m operații pentru inelul unidirecțional (inițial vid) este:

$$\text{cost}(s) \leq \sum_{i=1}^m \text{cost}_a(\text{op}_i) = O(m)$$

Metoda potențialului a fost aplicată mai sus pentru cazul particular $\Phi(D_0)=0$. Următoarea proprietate arată că analiza conduce la aceleași rezultate și pentru $\Phi(D_0)>0$ cu condiția ca $\Phi(D_i) \geq \Phi(D_0)$, $i=1, m$.

Propoziția 2.7 Dacă $\Phi(D_0)>0$ și $\Phi(D_i) \geq \Phi(D_0)$, $i=1, m$, atunci există o funcție de potențial Φ' astfel încât:

1. $\Phi'(D_0) = 0$ și $\Phi'(D_i) \geq 0$, $i=1, m$
2. Costurile amortizate $\text{cost}_a'(\text{op}_i)$, $i=1, m$, calculate pentru funcția de potențial Φ' , sunt aceleași ca și costurile amortizate $\text{cost}_a(\text{op}_i)$ calculate pentru Φ .

Să construim Φ' astfel încât $\Phi'(D_i) = \Phi(D_i) - \Phi(D_0)$, $i=0, m$. Se verifică relațiile de potențial:

$$\Phi'(D_0) = \Phi(D_0) - \Phi(D_0) = 0$$

$$\Phi'(D_i) = \Phi(D_i) - \Phi(D_0) \geq 0$$

$$\begin{aligned} \text{cost}_a'(\text{op}_i) &= \text{cost}(\text{op}_i) + \Phi'(D_i) - \Phi'(D_{i-1}) \\ &= \text{cost}(\text{op}_i) + \Phi(D_i) - \Phi(D_0) - \Phi(D_{i-1}) + \Phi(D_0) \\ &= \text{cost}(\text{op}_i) + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) \\ &= \text{cost}_a(\text{op}_i). \end{aligned}$$

■

Pentru funcția $\Phi(\text{Abs}_P(L, R)) = \#L$ din analiza inelului unidirecțional, propoziția (2.7) nu poate fi aplicată deoarece condiția $\Phi(D_i) \geq \Phi(D_0)$ necesară aplicării nu este satisfăcută pentru orice $i=1, m$. Într-adevăr, $\Phi(D_0)>0$ arată că inelul nu este vid la începutul operațiilor din secvența s . Este ușor de observat că după o normalizare efectivă impusă de operatorul op_i rezultă $\Phi(D_i)=0$, iar relația $\Phi(D_i) \geq \Phi(D_0)$ nu este satisfăcută.

În cazuri similare cu cel de mai sus, unde $\Phi(D_0)>0$, $\Phi(D_i) \geq 0$ pentru $i=1, m$, și există j astfel încât $\Phi(D_j) < \Phi(D_0)$, calculul costului secvenței s poate fi efectuat considerând funcția de potențial:

$$\Phi'(D_0) = \Phi(D_0) > 0$$

$$\Phi'(D_i) = \Phi(D_i) + \Phi(D_0) > 0, \quad i=1, m$$

Potențialul Φ' satisface $\Phi'(D_i) \geq \Phi'(D_0)$, pentru $i=1, m$, iar costurile amortizate rămân nemodificate pentru $i > 1$.

Pentru $i > 1$ rezultă:

$$\begin{aligned} \text{cost}_a'(\text{op}_i) &= \text{cost}(\text{op}_i) + \Phi'(D_i) - \Phi'(D_{i-1}) \\ &= \text{cost}(\text{op}_i) + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) \\ &= \text{cost}_a(\text{op}_i). \end{aligned}$$

Pentru $i=1$ obținem:

$$\begin{aligned} \text{cost}_a'(\text{op}_1) &= \text{cost}(\text{op}_1) + \Phi'(D_1) - \Phi'(D_0) \\ &= \text{cost}(\text{op}_1) + \Phi(D_1) \\ &\geq \text{cost}(\text{op}_1). \end{aligned}$$

Cu excepția op_1 , costurile amortizate pentru Φ' sunt aceleași ca și cele obținute în cazul funcției de potențial Φ și cu condiția la limită $\Phi(D_0)=0$. În ceea ce privește operația op_1 , costul ei amortizat este cel al unei secvențe de operații $s' = \text{op}_1', \dots, \text{op}_q'$, cu $\text{op}_q' = \text{op}_1$, care aduce structura de date dintr-o stare cu potențialul 0 în starea D_1 .¹

Să observăm că funcția Φ' satisface restricțiile impuse de propoziția (2.7), astfel încât costurile cost_a' sunt cele calculate pentru funcția de potențial

$$\begin{aligned} \Phi''(D_0) &= \Phi'(D_0) - \Phi'(D_0) = 0 \\ \Phi''(D_i) &= \Phi'(D_i) - \Phi'(D_0) = \Phi(D_i) \geq 0, i=1, m \end{aligned}$$

cu particularitatea operației op_1 , echivalentă secvenței s' de operații corespunzătoare transformării de potențial $0 \xrightarrow{s'} \Phi(D_1)$.

În concluzie, analiza amortizată folosind Φ'' este relevantă și pentru Φ , pornind de la structura D_1 pe care s-a executat deja prima operație. Cu alte cuvinte, analiza amortizată pentru o structură de date cu potențial inițial 0 (eventual vidă), este relevantă și pentru o structură de date aflată în orice stare inițială validă.

În cazul inelului cu starea inițială $D_0 = \text{Abs}_P(L_0, R_0)$, $L_0 \neq \text{nil}$, funcția de potențial modificată este:

$$\begin{aligned} \Phi'(D_0) &= \#L_0 \\ \Phi'(D_i) &= \#L_i + \#L_0 \end{aligned}$$

Se constată că, ignorând prima operație din secvența de operații, se obțin costurile amortizate corespunzătoare analizei ce pornește de la un inel cu $\#L_0=0$.

¹ Putem considera op_1 ca operație compusă din prelucrări ce pornesc de la o structură de date cu potențial nul.

2.7.5 Verificarea unor proprietăți ale inelului

Să verificăm proprietatea $\forall i \in \mathbb{N}, x \in \text{T Ring} \mid \neg \text{empty}(x) \bullet \text{Prop}(i, x)$, unde

$$\text{Prop}(i, x) \stackrel{\text{def}}{=} \text{top}(\text{move}^i(x)) = \text{element}(i, x)$$

Proprietatea este reprezentativă unui inel unidirecțional și arată că după i deplasări succesive ale vârfului unui inel nevid, elementul de la vârf este al i -lea element din inelul inițial. În acest fel, se precizează că deplasarea vârfului păstrează ordinea elementelor din inel. Proprietatea folosește următorii operatori auxiliari:

- $\text{element}: \mathbb{N} \times (\text{T Ring} \setminus \{\text{void}\}) \rightarrow \text{T}$ - $\text{element}(i, x)$ reîntoarce elementul $i \bmod \text{size}(x)$ din inelul nevid x .

- $\text{elm}: \mathbb{N} \times (\text{T Ring} \setminus \{\text{void}\}) \rightarrow \text{T}$ - $\text{elm}(i, x)$ reîntoarce elementul din poziția i , $0 \leq i < \text{size}(x)$, din inelul nevid x .

- $\text{size}: \text{T Ring} \rightarrow \mathbb{N}$ - $\text{size}(x)$ este numărul de elemente din inelul x . Pentru a scurta scrierea, adoptăm $\#x$ ca notație alternativă a lui $\text{size}(x)$.

Extinsă cu acești operatori, specificația tipului T Ring devine:

<pre> T Ring ::= void ins(T, T Ring) top: T Ring \ {void} → T move: T Ring \ {void} → T Ring del: T Ring \ {void} → T Ring empty: T Ring → bool element: N × (T Ring \ {void}) → T elm: N × (T Ring \ {void}) → T size: T Ring → N </pre>

<pre> (1) empty(void) = 1 (2) empty(ins(e, X)) = 0 (3) top(ins(e, X)) = e (4) del(ins(e, X)) = X (5) move(ins(e, void)) = ins(e, void) (6) move(ins(e, ins(e', X))) = ins(e', move(ins(e, X))) (7) element(i, X) = elm(i mod size(X), X) (8) elm(0, X) = top(X) (9) elm((i+1), ins(e, X)) = elm(i, X), pentru i < size(X) (10) size(void) = 0 (11) size(ins(e, X)) = 1+size(X) </pre>

Pentru verificarea $\text{Prop}(i, x)$, sunt utile următoarele două propoziții, demonstrate prin inducție structurală.

Propoziția 2.8 $\forall x \in T \text{ Ring} \mid \neg \text{empty}(X) \bullet P_1(X)$, cu $P_1(X) =_{\text{def}} \# \text{move}(X) = \#X$

Caz de bază. $x = \text{ins}(e, \text{void})$.

$\# \text{move}(\text{ins}(e, \text{void})) \rightarrow 5 \rightarrow \# \text{ins}(e, \text{void})$

Pas de inducție. $x = \text{ins}(e, \text{ins}(e', X'))$. Ca ipoteză inductivă considerăm adevărată proprietatea $\forall e \in T \bullet P_1(\text{ins}(e, X'))$.

$\# \text{move}(\text{ins}(e, \text{ins}(e', X')))$
 $\rightarrow 6 \rightarrow \# \text{ins}(e', \text{move}(\text{ins}(e, X')))$
 $\rightarrow 11 \rightarrow 1 + \# \text{move}(\text{ins}(e, X'))$
 $\rightarrow \text{ip.ind} \rightarrow 1 + \# \text{ins}(e, X')$
 $\rightarrow 11 \rightarrow 2 + \#X'$

$\# \text{ins}(e, \text{ins}(e', X'))$
 $\rightarrow 11 \rightarrow 1 + \# \text{ins}(e', X')$
 $\rightarrow 11 \rightarrow 2 + \#X'$

■

Propoziția 2.9 $\forall i \in \mathbb{N}, x \in T \text{ Ring} \mid \neg \text{empty}(X) \bullet P_2(i, X)$, unde

$P_2(i, X) =_{\text{def}} \text{element}(i, \text{move}(X)) = \text{element}(i+1, X)$

Caz de bază. $x = \text{ins}(e, \text{void})$. Să verificăm $P_2(i, x)$, pentru $i \in \mathbb{N}$ ales arbitrar.

$\text{element}(i, \text{move}(\text{ins}(e, \text{void})))$
 $\rightarrow 5 \rightarrow \text{element}(i, \text{ins}(e, \text{void}))$
 $\rightarrow 7 \rightarrow \text{elm}(i \bmod \# \text{ins}(e, \text{void}), \text{ins}(e, \text{void}))$
 $\rightarrow 11, 10 \rightarrow \text{elm}(i \bmod 1, \text{ins}(e, \text{void}))$
 $\rightarrow \text{mod} \rightarrow \text{elm}(0, \text{ins}(e, \text{void}))$
 $\rightarrow 8, 3 \rightarrow e$

$\text{element}(i+1, X)$
 $\rightarrow 7 \rightarrow \text{elm}((i+1) \bmod \# \text{ins}(e, \text{void}), \text{ins}(e, \text{void}))$
 $\rightarrow 11, 10 \rightarrow \text{elm}((i+1) \bmod 1, \text{ins}(e, \text{void}))$
 $\rightarrow \text{mod} \rightarrow \text{elm}(0, \text{ins}(e, \text{void}))$
 $\rightarrow 8, 3 \rightarrow e$

Pas de inducție. $x = \text{ins}(e, \text{ins}(e', X'))$. Ca ipoteză inductivă considerăm că este adevărată proprietatea $\forall e \in T \bullet P_2(i, \text{ins}(e, X'))$, pentru $i \in \mathbb{N}$ ales arbitrar. Să arătăm că proprietatea $P_2(i, x)$ este adevărată. Notăm:

LHS = $\text{element}(i, \text{move}(X))$
 RHS = $\text{element}(i+1, X)$

LHS = $\text{element}(i, \text{move}(\text{ins}(e, \text{ins}(e', X'))))$
 $\rightarrow 6 \rightarrow \text{element}(i, \text{ins}(e', \text{move}(\text{ins}(e, X'))))$
 $\rightarrow 7, 11, P_1 \rightarrow \text{elm}(i \bmod (2 + \#X'), \text{ins}(e', \text{move}(\text{ins}(e, X'))))$

Caz (a): $i \bmod (2+\#X')=0$. Atunci, avem $(i+1) \bmod (2+\#X') = 1$.

LHS = elm(0,ins(e',move(ins(e,X')))) — 8,3 → e'

RHS = element(i+1,ins(e,ins(e',X')))
 — 7,11 → elm((i+1) mod (2+#X'), ins(e,ins(e',X')))
 — [(i+1) mod (2+#X') = 1] → elm(1, ins(e,ins(e',X')))
 — 9 → elm(0,ins(e'X'))
 — 8,3 → e'

Caz (b): $i \bmod (2+\#X')>0$. Atunci, $i>0$ și $i \bmod (2+\#X') = (i-1) \bmod (2+\#X') + 1$.

LHS = elm((i-1) mod (2+#X')+1,ins(e',move(ins(e,X'))))
 — 9 → elm((i-1) mod (2+#X'),move(ins(e,X')))
 — [(i-1) mod (2+#X') < 1+#X'] →
 elm(((i-1) mod (2+#X')) mod (1+#X'), move(ins(e,X')))
 — P₁,7 → element((i-1) mod (2+#X'), move(ins(e,X')))
 — ip.ind → element((i-1) mod (2+#X')+1, ins(e,X'))
 — [i mod (2+#X') = (i-1) mod (2+#X')+1] →
 element(i mod (2+#X'), ins(e,X'))

Caz (b1): $i \bmod (2+\#X') = 1+\#X'$

LHS = element(1+#X', ins(e,X'))
 — 7 → elm((1+#X') mod ins(e,X'), ins(e,X'))
 — 11 → elm((1+#X') mod (1+#X'), ins(e,X'))
 — mod → elm(0, ins(e,X'))
 — 8,3 → e

Totodată, $i \bmod (2+\#X') = 1+\#X' \Rightarrow (i+1) \bmod (2+\#X') = 0$

RHS = element(i+1, ins(e,ins(e',X')))
 — 7,11 → elm((i+1) mod (2+#X'), ins(e,ins(e',X')))
 — [(i+1) mod (2+#X') = 0] → elm(0, ins(e,ins(e',X')))
 — 8,3 → e

Caz (b2): $i \bmod (2+\#X') < 1+\#X'$

LHS = element(i mod (2+#X'), ins(e,X'))
 — 7,11 → elm((i mod (2+#X')) mod (1+#X'), ins(e,X'))
 — mod → elm(i mod (2+#X'), ins(e,X'))
 — 9, [0 < i mod (2+#X') < 1+#X'] → elm(i mod (2+#X')-1, X')

RHS = element(i+1, ins(e,ins(e',X')))
 — 7,11 → elm((i+1) mod (2+#X'), ins(e,(ins(e',X'))))
 — [(i+1) mod (2+#X') = (i mod (2+#X'))+1] →
 elm((i mod (2+#X'))+1, ins(e,(ins(e',X'))))
 — 9 → elm(i mod (2+#X'), ins(e',X'))
 — 9, [0 < i mod (2+#X') < 1+#X'] → elm(i mod (2+#X')-1, X')

■

Propoziția 2.10 Există proprietatea $\forall i \in \mathbb{N}, X \in \mathbf{T\ Ring} \vdash \text{empty}(X) \bullet \text{Prop}(i, X)$, unde

$$\text{Prop}(i, X) =_{\text{def}} \text{top}(\text{move}^i(X)) = \text{element}(i, X).$$

Demonstrația este prin inducție după i .

Caz de bază. $i=0$.

```
top(move0(X)) = top(X)
element(0, X)
  — 7 → elm(0 mod #X, X)
  — mod → elm(0, X)
  — 8 → top(X)
```

Pas de inducție. $i \geq 0$. Ipoteza inductivă este $\forall X \in \mathbf{T\ Ring} \vdash \text{empty}(X) \bullet \text{Prop}(i, X)$. Să arătăm că $\text{Prop}(i+1, X)$ este adevărată, adică

$$\text{top}(\text{move}^{i+1}(X)) = \text{element}(i+1, X)$$

```
top(movei+1(X)) = top(movei(move(X)))
  — ip.ind → element(i, move(X))
  — P2 → element(i+1, X)
```

■

2.7.6 O implementare Haskell a inelului

Deși codificarea directă – într-un limbaj de programare funcțională – a specificațiilor tipurilor de date și implementărilor abstracte depășește cadrul acestei cărți, o incursiune superficială și succintă în acest domeniu este interesantă. Este scopul acestei secțiuni care prezintă:

- Codificarea Haskell [Tho 96] a specificației $\mathbf{T\ Ring}$.
- Implementarea efectivă a inelului conform $\mathbf{T\ Ring} = \mathbf{Abs}(\mathbf{T\ List}, \mathbf{T\ List})$.
- O aplicație a inelului pentru sortarea unei liste de chei.

Programele de mai jos corespund aproape ad-litteram specificației $\mathbf{T\ Ring}$ sau ecuațiilor de implementare și, evident, sunt executabile. În particular, programul corespunzător specificației $\mathbf{T\ Ring}$ poate fi considerat ca o implementare "abstractă" a inelului. Totuși, în programele Haskell apar următoarele diferențe minore sau variante de notație în raport cu textul din carte:

Program Haskell	Specificație $\mathbf{T\ Ring}$
$\mathbf{Ring\ t}$	$\mathbf{T\ Ring}$
$\mathbf{e:l}$	$\mathbf{cons(e, l)}$
$\mathbf{[]}$	$\mathbf{nil}$ (lista vidă)
$\mathbf{(f\ x)}$	$\mathbf{f(x)}$

Rescrierea Haskell a specificației inelului

```

module T_Ring where

-- Constructorii de bază: Void și Ins
-- Limbajul impune nume ce încep cu litere mari

data Ring t = Void
            | Ins (t, Ring t) deriving (Eq, Show)

-- Funcții corespunzătoare constructorilor de bază, utile
-- pentru compatibilitate deplină cu implementarea inelului

void = Void
ins(e,x) = Ins(e,x)

-- Axiomele operatorilor (signaturile sunt sintetizate automat)

empty(Void) = True
empty(Ins(_, _)) = False
top(Ins(e, _)) = e
del(Ins(_, x)) = x

move(Ins(e, Void)) = Ins(e, Void)
move(Ins(e, Ins(e', x))) = Ins(e', move(Ins(e, x)))

-- Axiomele operatorilor necesari proprietăților P1, P2 și Prop

element(i,x) = elm(i `mod` size(x), x)
elm(0,x) = top(x)
elm(i+1, Ins(_, x)) = elm(i, x)

size(Void) = 0
size(Ins(_, x)) = 1+size(x)

-- Proprietățile P1, P2 și Prop din secțiunea 2.7.5, unde
-- move_i(n,x) este move aplicat de n ori inelului x

p1 x = size(x) == size(move(x))
p2(i,x) = element(i, move(x)) == element(i+1, x)
prop(i,x) = top(move_i(i,x)) == element(i,x)
            where move_i(0,x) = x
                  move_i(i+1,x) = move_i(i, move(x))

-- Funcție care construiește un inel cu cheile unei liste
make_ring [] = Void
make_ring (e:l) = Ins(e, make_ring l)

-- Un inel
x = make_ring [1,2,3,4,5,6,7,8]

```

Aplicațiile $p1(x)$, $p2(i,x)$ și $prop(i,x)$ reîntorc valoarea `True` pentru orice $i \geq 0$ și orice inel nevid x .

Codificarea Haskell a implementării inelului

```

module Ring where
-- O implementare a tipului T Ring in Haskell, ca o pereche de liste

-- Reprezentarea inelului ca pereche de liste cu elemente de tip t
data Ring t = Abs([t],[t]) deriving (Eq,Show)

normalize(l,r) = if r==[] then ([],(reverse l)) else (l,r)

-- Ecuatiile de implementare a operatorilor inelului
void = Abs([],[])
ins (e,Abs(l,r)) = Abs(l,e:r)
del (Abs(l,r)) = Abs(normalize(l,(tail r)))
move (Abs(l,r)) = Abs(normalize((head r):l, (tail r)))
top (Abs(l,r)) = head r
empty (Abs(l,r)) = r == []

-- Axiomele operatorilor necesari proprietăților P1,P2 și Prop

size(x) = if empty(x) then 0 else 1+size(del(x));;
elm(0,x) = top(x)
elm(i+1,x) = elm(i,del(x))
element(i,x) = elm(i `mod` size(x), x)

{-
  Axioma elm(i+1,ins(e,x)) = elm(i,x) este rescrisa în stilul
  elm(i+1,y) = elm(i,del(y)) folosind schimbarea de variabilă
  y = ins(e,x) => x = del(y) .

  La fel s-a procedat și pentru axioma size(ins(e,x)) = 1+size(x)
  scrisă size(x) = 1+size(del(x))
-}

-- Proprietatile P1, P2 și Prop din secțiunea 2.7.5, unde
-- move_i(i,x) este move aplicat de i ori inelului x

p1 x = size(x) == size(move(x))
p2(i,x) = element(i, move(x)) == element(i+1,x)
prop(i,x) = top(move_i(i,x)) == element(i,x)

move_i(0,x) = x
move_i(i+1,x) = move_i(i,move(x))

-- Funcție care construiește un inel cu cheile unei liste
make_ring [] = void
make_ring (e:l) = ins(e,make_ring l)

-- Un inel
x = make_ring [1,2,3,4,5,6,7,8]

```

Aplicațiile $p1(x)$, $p2(i,x)$ și $prop(i,x)$ reîntorc valoarea `True` pentru orice $i \geq 0$ și orice inel nevid x . Evident, din moment ce implementarea respectă axiomele specificației `T Ring`, ea conservă și proprietățile inelului.

O aplicație: sortare pe bază de inel

Sortarea unei liste unidirecționale folosind un inel de tip $\mathbf{T}$ `Ring` se aseamănă cu sortarea prin inserție directă a unui vector. Pentru simplitate, considerăm sortarea nedescrescătoare a unei liste cu chei întregi, deci presupunem că tipul generic $\mathbf{T}$ din specificațiile $\mathbf{T}$ `List` și $\mathbf{T}$ `Ring` este particularizat la tipul de date `int`.

O variantă simplă de sortare a unei liste nevide `l` constă în construirea unui nou inel sortat prin inserția elementului `head(l)` într-un inel sortat în aceeași manieră și care conține elementele listei `tail(l)`. Evident, pentru o listă vidă, inelul sortat este vid. Operația de bază a sortării este

```
put: int × int Ring → int Ring
```

și satisface axiomele

```
(p1) put(e,void) = ins(e,void)
(p2) put(e,ins(e',X)) = if e < e' then ins(e,ins(e',X))
                        else ins(e',put(e,X))
```

Să arătăm că, pentru $x \in \text{int Ring}$ deja sortat nedescrescător, `put(e,X)` produce un inel sortat nedescrescător. Pentru că avem nevoie de formalizarea noțiunii de inel sortat nedescrescător, definim următoarele predicate:

```
ord: int Ring → bool și
min: int × (int Ring) → bool
```

astfel încât:

```
(o1) ord(void) = 1
(o2) ord(ins(e,X)) = min(e,X) ∧ ord(X)

(m1) min(e,void) = 1
(m2) min(e,ins(e',X)) = e ≤ e' ∧ min(e,X)
```

De asemenea, considerăm adevărate proprietățile

$$\forall X \in \text{int Ring}, e \in \text{int}, e' \in \text{int} \bullet P'(e, e', X)$$

$$\forall X \in \text{int Ring}, e \in \text{int}, e' \in \text{int} \bullet P''(e, e', X)$$

unde,

```
P'(e, e', X) =def min(e, put(e', X)) = e ≤ e' ∧ min(e, X)
P''(e, e', X) =def e ≤ e' ∧ min(e', X) ⇒ min(e, X)
```

Demonstrațiile sunt prin inducție structurală, fiind lăsate ca exercițiu.

Folosind `ord`, proprietatea esențială pe care se bazează procesul de sortare poate fi formulată $\forall X \in \text{int Ring}, e \in \text{int} \bullet P(e, X)$, cu

$$P(e, X) =_{\text{def}} \text{ord}(X) \Rightarrow \text{ord}(\text{put}(e, X))$$

Propoziția 2.11 $\forall x \in \text{int Ring} \bullet P(x)$. Demonstrația este prin inducție structurală.

Caz de bază: $x = \text{void}$. Să alegem $e \in T$ arbitrar.

```

P(e,void) = ord(void)  $\Rightarrow$  ord(put(e,void))
  — o1  $\rightarrow 1 \Rightarrow$  ord(put(e,void))
  — p1  $\rightarrow 1 \Rightarrow$  ord(ins(e,void))
  — o2  $\rightarrow 1 \Rightarrow \min(e,\text{void}) \wedge \text{ord}(\text{void})$ 
  — m1,o1  $\rightarrow 1 \Rightarrow 1$ 
  = 1

```

Pas de inducție: $x = \text{ins}(e',x')$, unde $e' \in \text{int}$ și $x' \in \text{int Ring}$ sunt valori alese arbitrar. Ca ipoteză inductivă, considerăm adevărată proprietatea $P(e,x')$ pentru $e \in \text{int}$ ales arbitrar. Să arătăm că proprietatea $P(e,x)$ este adevărată, anume că:

$$\text{ord}(\text{ins}(e',x')) \Rightarrow \text{ord}(\text{put}(e,\text{ins}(e',x')))$$

Dacă termenul $\text{ord}(\text{ins}(e',x'))$ este fals, implicația este adevărată banal. Să considerăm că $\text{ord}(\text{ins}(e',x'))$ este adevărat. Atunci, conform axiomei (o2) avem următoarele concluzii:

```

(c1)  $\min(e',x') = 1$ 
(c2)  $\text{ord}(x') = 1$ 

```

Pentru ca implicația $P(e,x)$ să fie adevărată trebuie ca termenul $\text{ord}(\text{put}(e,\text{ins}(e',x')))$ să fie adevărat.

Caz 1. $e < e'$

```

ord(put(e,ins(e',x')))
  — p2  $\rightarrow \text{ord}(\text{ins}(e,\text{ins}(e',x')))$ 
  — o2  $\rightarrow \min(e,\text{ins}(e',x')) \wedge \text{ord}(\text{ins}(e',x'))$ 
  — m2  $\rightarrow e \leq e' \wedge \min(e,x') \wedge \text{ord}(\text{ins}(e',x'))$ 
  — Caz 1, c1,  $P''(e,e',x') \rightarrow \text{ord}(\text{ins}(e',x'))^2$ 
  — ipoteză  $\rightarrow 1$ 

```

Caz 2. $e \geq e'$

```

ord(put(e,ins(e',x')))
  — p2  $\rightarrow \text{ord}(\text{ins}(e',\text{put}(e,x')))$ 
  — o2  $\rightarrow \min(e',\text{put}(e,x')) \wedge \text{ord}(\text{put}(e,x'))$ 
  — ip.induct.  $P(e,x')$ , c2  $\rightarrow \min(e',\text{put}(e,x'))^3$ 
  —  $P'(e',e,x') \rightarrow e' \leq e \wedge \min(e',x')$ 
  — Caz 2, c1  $\rightarrow 1$ 

```

■

² Termenul $\min(e,x')$ este adevărat conform implicației $P''(e,e',x')$

³ Termenul $\text{ord}(\text{put}(e,x'))$ este adevărat conform implicației $P(e,x')$

Considerând lista de sortat $l = \text{cons}(l_1, \text{cons}(l_2, \dots, \text{cons}(l_n, \text{nil}) \dots))$, atunci, prin inducție după n și conform propoziției (2.11), inelul

$$r = \text{put}(l_1, \text{put}(l_2, \dots, \text{put}(l_n, \text{void}) \dots))$$

rezultă sortat nedescrescător. Funcția care construiește inelul r este:

```
ring_sort: int List → int Ring

ring_sort(nil) = void
ring_sort(cons(e, L)) = put(e, ring_sort(L))
```

Dacă dorim ca rezultatul sortării să fie o listă, inventăm o funcție care descarcă elementele unui inel (indiferent de tipul elementelor) într-o listă inițial vidă.

```
ring_to_list: T Ring → T List

ring_to_list(void) = nil
ring_to_list(ins(e, X)) = cons(e, ring_to_list(X))
```

În final, funcția de sortare este reprezentată de compunerea funcțiilor `ring_sort` și `ring_to_list`:

```
sort: int List → int List

sort L = (ring_to_list o ring_sort) (L)
        = ring_to_list(ring_sort(L))
```

Transcrierea Haskell a sortării, impune modificarea axiomelor funcțiilor `put` și `ring_to_list`.⁴ Prima axiomă a funcției `put` este transformată prin schimbarea de variabilă $x = \text{void}$, impunând restricția `empty(x)`. Cea de a doua axiomă a lui `put` este transformată folosind schimbarea de variabilă $x = \text{ins}(e', x)$ și observând, pe baza axiomelor din specificația inelului, că: $e' = \text{top}(x)$ și $x = \text{del}(x)$. Se obține:

$$\text{put}(e, X) = \begin{cases} \text{ins}(e, \text{void}), & \text{dacă } \text{empty}(X) \\ \text{ins}(e, X), & \text{dacă } \neg \text{empty}(X) \wedge e < \text{top}(X) \\ \text{ins}(\text{top}(X), \text{put}(e, \text{del}(X))), & \text{dacă } \neg \text{empty}(X) \wedge e \geq \text{top}(X) \end{cases}$$

Similar, sunt transformate și axiomele funcției `ring_to_list`:

$$\text{ring_to_list}(X) = \begin{cases} \text{nil}, & \text{dacă } \text{empty}(X) \\ \text{cons}(\text{top}(X), \text{ring_to_list}(\text{del}(X))) \end{cases}$$

⁴ Motivul îl constituie definirea constructorilor `void` și `ins` ca funcții implementate pe baza constructorului `Abs`. Haskell nu acceptă ca parametri formali ai funcțiilor să fie specificații în forma unor aplicații de funcții, așa cum cer axiomele nemodificate ale lui `put` și `ring_to_list`. Totodată, codificarea din modulul `RingSort` are un avantaj: funcționează corect cu ambele implementări ale inelului, conforme modulelor `T_Ring` și `RingImpl`.

Într-o primă variantă, codificarea Haskell a sortării urmărește îndeaproape specificarea funcției `sort`.

```
module RingSort where
import RingImpl

sort l = (ring_to_list . ring_sort) l
  where -- f . g este compunerea lui f cu g
        ring_sort [] = void
        ring_sort (e:l) = put(e,ring_sort(l))

        put(e,x)
        | empty(x) = ins(e,void)
        | e < top(x) = ins(e,x)
        | otherwise = ins(top(x),put(e,del(x)))

        ring_to_list x
        | empty(x) = []
        | otherwise = (top x):(ring_to_list (del x))
```

O variantă mai sofisticată folosește o prelucrare interesantă, dar comună în limbajele de programare funcționale. Prelucrarea corespunde următoarei funcții:

```
foldr: ((T × T') → T') × T' × (T List) → T'
foldr(f,X,nil) = X
foldr(f,X,cons(e,L)) = f(e,foldr(f,X,L))
```

Prin urmare, aplicația `foldr(put,void,l)`, unde $l = \text{cons}(l_1, \text{cons}(l_2, \dots, \text{cons}(l_n, \text{nil}) \dots))$, este echivalentă cu `put(l1,put(l2,...,put(ln,void)...)...`, adică are efectul `ring_sort(l)`.

```
module RingSort where
import RingImpl

sort l = ring_to_list(foldr put void l)
  where
        put e x -- vezi comentariul5
        | empty(x) = ins(e,void)
        | e < top(x) = ins(e,x)
        | otherwise = ins(top(x), put e (del x))

        ring_to_list x
        | empty(x) = []
        | otherwise = (top x):(ring_to_list (del x))
```

⁵ `foldr` cere ca `put` să fie o funcție binară. În Haskell, `put(e,x)` definește o funcție cu un singur parametru din mulțimea produs `int × int Ring`, în timp ce `put e x` descrie o funcție binară cu primul parametru de tip `int` și al doilea parametru de tip `int Ring`. Diferența este mai subtilă: o funcție binară poate fi aplicată parțial. Aplicarea asupra primului parametru produce o funcție unară care așteaptă cel de al doilea parametru. Din program, se vede că însăși `foldr` este o funcție ternară care are proprietăți similare.

La încărcarea și execuția programului, se poate obține un rezultat de forma:

```
RingSort> sort [5,1,2,7,1,2,5,6,4]
[1,1,2,2,4,5,5,6,7] :: [Integer]
```

Modulele Haskell de mai sus implementează mai mult decât sortarea unei liste de întregi. Ele descriu sortarea unei liste cu elemente de orice tip peste care este definită o relație de ordine. Generalitatea este vizibilă din semnătura Haskell a funcției `sort`, sintetizată automat, anume:

```
RingSort> :type sort
sort :: Ord t => [t] -> [t]
```

Signătura arată că tipul `t` trebuie să facă parte din clasa `Ord`, clasa tipurilor peste care este definită o relație de ordine. Astfel, se poate scrie:

```
RingSort> sort [True,False]
[False,True] :: [Bool]
RingSort> sort [2.1,3.0,3.14,0.1,4.5]
[0.1,2.1,3.0,3.14,4.5] :: [Double]
```

Complexitatea amortizată a sortării, anume $C(n) = T(n) + D(n) + R(n)$, unde n este numărul de chei din lista de sortat, ține cont de complexitatea $T(n)$ a comparării cheilor, de complexitatea amortizată $D(n)$ a operațiilor `del` efectuate în cursul sortării și de complexitatea amortizată $R(n)$ a descărcării inelului sortat în lista rezultat. La inserția celei de a i -a chei în inel se efectuează cel mult $i-1$ comparații, iar lungimea secvenței de operații `del` este i . Descărcarea inelului implică o secvență de n operații `del`, celelalte operații ale descărcării având complexitate $O(1)$. Deci,

$$T(n) \leq \Theta(1) \sum_{i=1}^n (i-1), D(n) = \sum_{i=1}^n O(i) \text{ și } R(n) = O(n)$$

Rezultă $C(n) = O(n^2)$.

Comentarii

Conținutul secțiunii 2.7.6 depășește cadrul strict al analizei algoritmilor, fiind la intersecția următoarelor domenii: metode formale, programare funcțională, analiza algoritmilor. Dar morala este vizibilă și importantă: este mai sigur și, în unele cazuri, mai ușor să se dezvolte teoretic un algoritm corect decât să fie construit un algoritm "intuitiv" care, ulterior, trebuie verificat. Totodată, dezvoltarea elaborată, pornind de la specificații, poate salva timp și efort în procesul implementării algoritmului și validării programului. Concluzia capătă greutate mai ales pentru aplicațiile critice, acolo unde o anomalie a algoritmului poate fi extrem de costisitoare.

Cine dorește să afle mai mult despre Haskell poate consulta situl <http://www.haskell.org>, unde se găsesc medii de programare Haskell, inclusiv documentație Haskell (manual de referință).

Exerciții

Propoziția 2.12 $\forall x \in \text{int Ring}, e \in \text{int}, e' \in \text{int} \bullet P'(e, e', x)$, unde

$$P'(e, e', x) =_{\text{def}} \min(e, \text{put}(e', x)) = e \leq e' \wedge \min(e, x)$$

Demonstrația este prin inducție structurală. Alegem $e \in T$, $e' \in T$ și $x \in T \text{ Ring}$ la întâmplare și notăm:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \min(e, \text{put}(e', x)) \\ \text{RHS} &= e \leq e' \wedge \min(e, x) \end{aligned}$$

Caz de bază. $x = \text{void}$.

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \min(e, \text{put}(e', \text{void})) \\ &\quad \text{— } p2 \rightarrow e \leq e' \wedge \min(e, \text{void}) \\ &\quad \text{— } m1 \rightarrow e \leq e' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= e \leq e' \wedge \min(e, \text{void}) \\ &\quad \text{— } m1 \rightarrow e \leq e' = \text{LHS} \end{aligned}$$

Pas de inducție. Alegem ca ipoteză inductivă $P'(e, e', x)$ și demonstrăm că proprietatea $P'(e, e', \text{ins}(e'', x))$ este adevărată, pentru $e'' \in T$ ales la întâmplare.

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= e \leq e' \wedge \min(e, \text{ins}(e'', x)) \\ &\quad \text{— } m2 \rightarrow e \leq e' \wedge e \leq e'' \wedge \min(e, x) \end{aligned}$$

Caz 1. $e' < e''$

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \min(e, \text{put}(e', \text{ins}(e'', x))) \\ &\quad \text{— } p2 \rightarrow \min(e, \text{ins}(e', \text{ins}(e'', x))) \\ &\quad \text{— } m2 \rightarrow e \leq e' \wedge \min(e, \text{ins}(e'', x)) \\ &\quad \text{— } m2 \rightarrow e \leq e' \wedge e \leq e'' \wedge \min(e, x) \\ &\quad \text{— } \text{Caz 1} \rightarrow e \leq e' \wedge \min(e, x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= e \leq e' \wedge \min(e, \text{ins}(e'', x)) \\ &\quad \text{— } m2 \rightarrow e \leq e' \wedge e \leq e'' \wedge \min(e, x) \\ &\quad \text{— } \text{Caz 1} \rightarrow e \leq e' \wedge \min(e, x) = \text{LHS} \end{aligned}$$

Caz 2. $e' \geq e''$

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \min(e, \text{put}(e', \text{ins}(e'', x))) \\ &\quad \text{— } p2 \rightarrow \min(e, \text{ins}(e'', \text{put}(e', x))) \\ &\quad \text{— } m2 \rightarrow e \leq e'' \wedge \min(e, \text{put}(e', x)) \\ &\quad \text{— } \text{ip. iduct.} \rightarrow e \leq e'' \wedge e \leq e' \wedge \min(e, x) \\ &\quad \text{— } \text{Caz 2} \rightarrow e \leq e'' \wedge \min(e, x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= e \leq e' \wedge \min(e, \text{ins}(e'', x)) \\ &\quad \text{— } m2 \rightarrow e \leq e' \wedge e \leq e'' \wedge \min(e, x) \\ &\quad \text{— } \text{Caz 2} \rightarrow e \leq e'' \wedge \min(e, x) = \text{LHS} \end{aligned}$$

■

Propoziția 2.13 $\forall x \in \text{int Ring}, e \in \text{int}, e' \in \text{int} \bullet P''(e, e', x)$, unde

$$P''(e, e', x) =_{\text{def}} e \leq e' \wedge \min(e', x) \Rightarrow \min(e, x)$$

Demonstrația este prin inducție structurală. Alegem $e \in \mathbb{T}$, $e' \in \mathbb{T}$ și $x \in \mathbb{T} \text{ Ring}$ la întâmplare și notăm:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= e \leq e' \wedge \min(e', x) \\ \text{RHS} &= \min(e, x) \end{aligned}$$

Caz de bază. $x = \text{void}$.

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= e \leq e' \wedge \min(e', \text{void}) \\ &\quad \text{— } m1 \rightarrow e \leq e' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \min(e, \text{void}) \\ &\quad \text{— } m1 \rightarrow 1 \end{aligned}$$

S-a obținut tautologia $e \leq e' \Rightarrow 1$.

Pas de inducție. Alegem ca ipoteză inductivă $P''(e, e', x)$ și demonstrăm că proprietatea $P''(e, e', \text{ins}(e'', x))$ este adevărată, pentru $e'' \in \mathbb{T}$ ales la întâmplare.

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= e \leq e' \wedge \min(e', \text{ins}(e'', x)) \\ &\quad \text{— } m2 \rightarrow e \leq e' \wedge e' \leq e'' \wedge \min(e', x) \end{aligned}$$

Să considerăm că $\text{LHS} = 1$. Atunci,

- (c1) Conform ipotezei inductive, $\min(e, x) = 1$ și
(c2) $e \leq e''$

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \min(e, \text{ins}(e'', x)) \\ &\quad \text{— } m2 \rightarrow e \leq e'' \wedge \min(e, x) \\ &\quad \text{— } c1, c2 \rightarrow 1 \end{aligned}$$

■