Lucrarea 7

Sinteza Filtrelor cu Răspuns Finit la Impuls

Un *filtru digital* sau *numeric* este un sistem discret care scalează şi/sau defazează în mod selectiv componentele spectrale ale semnalului discret de intrare, oferind la ieşire un semnal discret optim pentru scopul dorit. Scopul filtrării este de a îmbunătăți calitatea semnalului (de a reduce sau înlătura zgomotul), de a extrage informații sau de a separa două sau mai multe semnale combinate.

Filtrarea numerică este preferată celei analogice datorită unuia sau mai multor *avantaje*, dintre care enumerăm:

1. Filtrele numerice pot avea caracteristici imposibil de realizat cu filtrele analogice, (de exemplu, fază perfect liniară, în cazul filtrelor FIR).
2. Spre deosebire de filtrele analogice, performanțele celor digitale nu variază cu variabilele mediului, de exemplu, temperatura. Aceasta elimină necesitatea calibrării periodice.
3. Diferite semnale de intrare pot fi filtrate de un singur filtru digital, fără modificarea structurii hard, prin multiplexare.
4. Atât datele filtrate cât şi cele nefiltrate pot fi stocate pentru o prelucrare ulterioară.
5. Folosind avantajele tehnologiei VLSI, aceste filtre pot fi realizate la dimensiuni mici, putere mică, preț scăzut.

1. Elaborarea specificațiilor filtrului

Proiectarea unui filtru discret presupune trei etape importante:

1. Elaborarea specificațiilor filtrului;
2. Determinarea parametrilor filtrului pentru a satisface specificațiile;
3. Realizarea filtrului numeric printr-o structură specifică.

Primul pas este specificarea caracteristicilor filtrului. Pentru exemplificare se prezintă în figura 1 caracteristica de amplitudine a unui Filtru Trece Bandă (FTB). Pentru specificarea răspunsului în amplitudine, $|H(\omega)|$, se utilizează următorii parametri

ε - eroarea permisă în B.T.

δ_p - deviația din B.T.

δ_s - deviația din B.O.

$f_{p1},\ f_{p2}$ - frecvențele de margine din B.T.

$f_{s1},\ f_{s2}$ - frecvențele de margine din B.O.

Deviațiile din B.T. şi B.O. pot fi exprimate direct în unități de măsură corespunzătoare semnalului (V, A, etc) sau în dB, când sunt definite astfel:

$$A_P = 20\log_{10}\left(\frac{1+\delta_p}{1-\delta_p}\right) = 20\log_{10}\left(1+\varepsilon\right), \tag{7}$$

$$A_S = -20\log_{10}\delta_s, \tag{8}$$

Pasul următor este cel al *calculului coeficienților filtrului* şi va fi prezentat pe larg în secțiunile următoare din lucrarea de laborator.

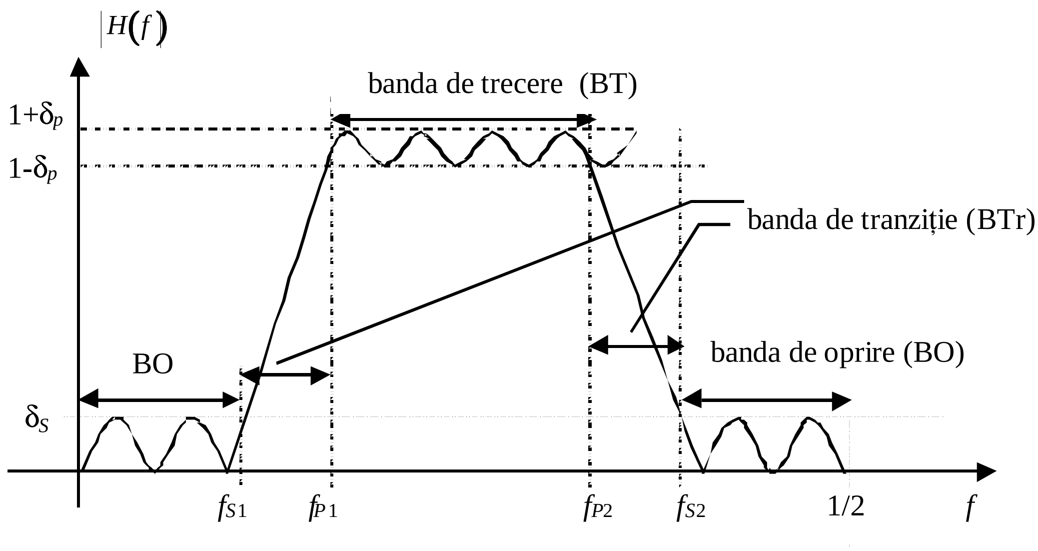


Figura 1. Caracteristica de frecvență a unui FTB

2. Noțiuni teoretice

2.1. Caracterizarea filtrelor FIR

Un filtru cu răspuns finit la impuls (FIR de la acronimul în engleză *Finite Impulse Response*) poate fi caracterizat, în mod echivalent, prin una din ecuațiile:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]\, x[n-k], \tag{1}$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} h[k] z^{-k}, \tag{2}$$

sau

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{M-1} h[k] e^{-j\omega k}, \tag{3}$$

unde: - $h[k]$ sunt coeficienții răspunsului la impuls al filtrului;
- $H(z)$ funcția de transfer a filtrului;
- M-1 ordinul filtrului;
- ω pulsația normalizată cu frecvența de eşantionare $F_S = \frac{2}{T}$ (T - perioada de eşantionare).

Filtrele **FIR** sunt specifice domeniului discret şi nu pot fi obținute prin transformarea filtrelor analogice.

Răspunsul în frecvență, $H(\omega)$, poate fi exprimat sub forma:

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\Theta(\omega)}, \tag{4}$$

Dacă $h[n]$ este o funcție reală, atunci $|H(\omega)|$ este o funcție pară, iar $\Theta(\omega)$ impară.

Unul din cele mai simple filtre FIR este cel cu fază liniară. Numai filtrele FIR pot fi proiectate a avea fază liniară. Se demonstrează că un filtru FIR are fază liniară, dacă şi numai dacă răspunsului la impuls, $h[n]$, satisface condiția:

$$h[n] = \pm h[M-1-n], \qquad n = \overline{0, M-1}, \tag{5}$$

relație cunoscută şi sub numele de *condiția de liniaritate a lui Gibbs.*

Filtrele pentru care este îndeplinită condiția de simetrie ($h[n] = h[M-1-n]$)sunt utilizate, în general, pentru filtrare propriu-zisă, pe când cele pentru care este îndeplinită condiția de asimetrie ($h[n] = -h[M-1-n]$) sunt utilizate în aplicații cu defazare (*integrator*, *diferențiator*, *transformator Hilbert*).

2.2. Metode de aproximare a filtrelor FIR

Metodele de aproximare ale funcției de transfer cel mai frecvent folosite în cazul filtrelor FIR sunt:

1) metoda ferestrelor de timp;
2) metoda eşantionării în frecvență;
3) metoda optimală.

2.2.1. Metoda ferestrelor

Etapele de proiectare în cazul metodei ferestrelor sunt:

1^0 Specificarea răspunsului în frecvență dorit, notat $H_d(\omega)$, atenuarea în banda de oprire, atenuarea în banda de trecere şi frecvențele capetelor de bandă. De obicei răspunsul dorit se consideră a fi răspunsul filtrului ideal de acel tip;

2^0 Obținerea răspunsului la impuls $h_d[n]$ prin calcularea transformatei Fourier inverse:

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) e^{j\omega n} d\omega, \tag{6}$$

Pentru filtrele selective de frecvență expresia pentru $h_d[n]$ este dată în tabelul 1.

Tabelul 1. Răspunsurile ideale la impuls pentru filtre uzuale

Tipul filtrului	Răspunsul la impuls ideal $h_d[n] \quad , n \neq 0$	$h_d[0]$
FTJ	$2f_c \sin(n\omega_c)/(n\omega_c)$	$2f_c$
FTS	$-2f_c \sin(n\omega_c)/(n\omega_c)$	$1-2f_c$
FTB	$2f_2 \sin(n\omega_2)/(n\omega_2) -$ $2f_1 \sin(n\omega_1)/(n\omega_1)$	$2(f_2 - f_1)$
FOB	$2f_1 \sin(n\omega_1)/(n\omega_1) -$ $2f_2 \sin(n\omega_2)/(n\omega_2)$	$1-2(f_2 - f_1)$

În general, răspunsul la impuls $h_d[n]$ este de durată infinită şi, pentru a se obține un filtru FIR, acesta trebuie trunchiat. Pentru un filtru FIR de lungime M trunchierea se face la *n = M – 1*, ceea ce este echivalent cu multiplicarea lui $h_d[n]$ cu o *„funcție fereastră”* de lungime *M*, notată $w[n]$, având transformata Fourier $W(\omega)$.

3^0 Se selectează funcția fereastră prin a cărei folosire se satisfac specificațiile filtrului, apoi se determină numărul de coeficienți ai filtrului folosind relațiile aproximative specificate în tabelul 2 (relațiile dintre lățimea benzii de tranziție şi lungimea filtrului).

4^0 Se obțin valorile lui $w_M[n]$ pentru funcția fereastră aleasă şi valorile coeficienților filtrului FIR, $h[n]$ după relația:

$$h[n] = h_d[n] w_M[n], \tag{7}$$

Efectele trunchierii în timp se manifestă în domeniul frecvență prin apariția unor ripluri în banda de trecere şi în banda de oprire, precum şi o bandă de tranziție de lățime nenulă. În tabelul 2 sunt prezentați diverşi parametri ai ferestrelor utilizate în proiectare.

Tabelul 2. Parametrii ferestrelor de timp utilizate pentru proiectarea filtrelor FIR

Tipul ferestrei	Lățimea benzii de tranziție (normalizată)	Riplul în banda de trecere (dB)	Atenuarea lob principal/ lob secundar (dB)	Atenuare în banda de oprire (dB)
Rectangular	0,9/M	0,7614	13	21
Hanning	3,1/M	0,0546	31	44
Hamming	3,3/M	0,0194	41	53
Blackman	5,5/M	0,0017	57	74
Kaiser	2,93/M(β=4,54) 4,32/M(β=4,76) 5,71/M(β=8,96)	0,0276 0,00275 0,000275		50 70 90

2.2.2. Metoda eșantionării în frecvență

Această metodă permite proiectarea filtrelor FIR nerecursive pentru filtre standard (FTJ, FTS, FTB, FOB) şi filtre cu răspuns în frecvență arbitrar. De asemenea poate fi folosită şi pentru proiectarea filtrelor FIR recursive.

Se poate specifica următorul set de frecvențe, egal spațiate, în care se specifică răspunsul în frecvență

$$\omega_k = \frac{2\pi}{M}(k+\alpha), \qquad \begin{array}{ll} k = \overline{0, \frac{M-1}{2}} & \textit{pentru } M \textit{ impar} \\ k = \overline{0, \frac{M}{2}-1} & \textit{pentru } M \textit{ par} \end{array} \tag{8}$$

α=0, pentru filtre de tipul I sau α=1/2, pentru filtre de tipul II.

Se determină coeficienții răspunsului la impuls $h[n]$ al filtrului FIR pornind de la aceste specificații în frecvență, egal decalate. Este de dorit să se optimizeze cerințele în frecvență în banda de tranziție a filtrului.

Răspunsul în frecvență al unui filtru FIR este dat de relația:

$$H\ (\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n} \tag{9}$$

Se presupune că răspunsul filtrului este dat la frecvențele specificate de relația (8). Se obține:

$$H(k+\alpha) = H\left(\frac{2\pi}{M}(k+\alpha)\right)$$
$$H(k+\alpha) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n] \cdot e^{-j2\pi(k+\alpha)n/M} \tag{10}$$

Din această relație, prin inversare, se obține răspunsul la impuls $h[n]$, în funcție de $H(k+\alpha)$. Rezultă deci:

$$h[n] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} H(k+\alpha) e^{j2\pi(k+\alpha)n/M} \qquad n = \overline{0, M-1} \tag{11}$$

Funcția de fază zero a filtrului proiectat va fi:

$$H_R(\omega) = \sum_{k=0}^{M-1} H_d[k+\alpha] P(\omega, k+\alpha) =$$
$$= \sum_{k=0}^{M-1} H_d[k+\alpha] \frac{1}{M} S_a\left(\omega - \frac{2\pi\alpha}{M} - \frac{2\pi k}{M}\right) \tag{12}$$

unde

$$S_a\left(\omega - \frac{2\pi\alpha}{M} - \frac{2\pi k}{M}\right) = \frac{\sin\frac{M}{2}\left(\omega - \frac{2\pi\alpha}{M}\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(\omega - \frac{2\pi\alpha}{M} - k\frac{2\pi}{M}\right)}$$

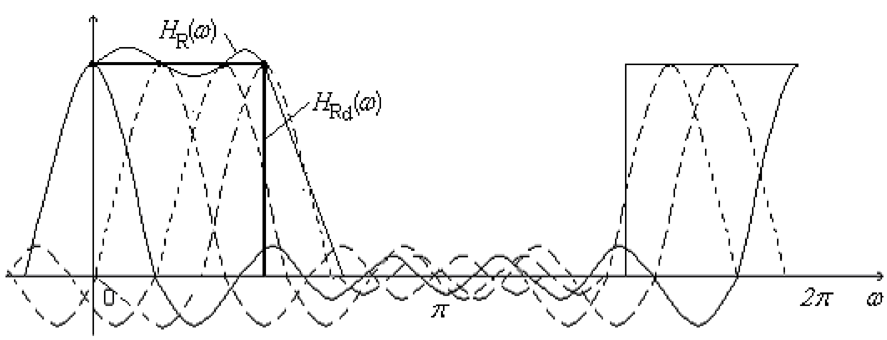


Figura 2. Răspunsul de fază zero al filtrului dorit şi al celui real

Dacă $h[n]$ este real, se observă ca eşantioanele în frecvență $H(k+\alpha)$ satisfac proprietatea de simetrie:

$$H(k+\alpha) = H^*(M-k-\alpha) \tag{13}$$

Această condiție împreună cu cea pentru $h[n]$ face ca numărul de puncte în care se precizează $H(\omega)$ să se reducă la $(M+1)/2$ dacă *M* este impar şi la $M/2$ dacă *M* este par.

Există patru situații posibile:

1. $h[n]$ simetric, α=0
2. $h[n]$ simetric, α=1/2

3. $h[n]$ antisimetric, α=0
4. $h[n]$ antisimetric, α=1/2.

Pentru fiecare situație se stabileşte relația pentru răspunsul la impuls $h[n]$.

Avantajul metodei eşantionării în frecvență constă în structura de eşantionare eficientă atunci când multe din eşantioanele răspunsului de modul în frecvență sunt zero. În scopul minimizării erorii se pot utiliza 1-3 eşantioane suplimentare situate în banda de tranziție.

2.2.3. Metoda optimală

Aproximarea de tip Cebîşev este văzută ca un criteriu de proiectare optim, în sensul că eroarea de aproximare ponderată dintre răspunsul în frecvență dorit şi cel obținut este întinsă uniform peste banda de trecere şi cea de oprire şi apoi se minimizează eroarea maximă. Această aproximare poate utiliza metoda de schimb *Remez* sau *metoda celor mai mici pătrate*.

3. Implementarea în MATLAB a filtrelor FIR

A. Pentru proiectarea filtrelor FIR cu ajutorul metodei ferestrelor şi a eşantionării în frecvență se folosesc următoarele funcții:

- **`fir1`** implementează metoda clasică a proiectării filtrelor FIR cu fază liniară prin metoda ferestrelor. Se pot proiecta filtre FTJ, FTS, FTB şi FOB.

  `b=fir1(n,wn)` returnează un vector *b* ce conține *n+1* coeficienți ai unui filtru FIR, de tipul FTJ de ordin *n*, aproximat prin metoda ferestrei Hamming, cu frecvența de tăiere *wn*. Coeficienții sunt ordonați în ordine descrescătoare a puterilor lui *z*. *wn* este un număr între 0 şi 1, cu 1 corespunzând la $F_s/2$. Când *wn* este un vector cu două elemente `wn=[w1 w2]`, **`fir1`** returnează un filtru FTB cu banda de trecere cuprinsă între w_1 şi w_2 .

  `b=fir1(n,wn,'type')` are aceeaşi semnificație ca cea anterioară. În plus specifică tipul filtrului, unde:

  - `'high'` este pentru un filtru FTS cu frecvența de tăiere `wn`;
  - `'stop'` este pentru un filtru FOB, dacă `wn=[w1 w2]`.

  `fir1` utilizează întotdeauna un ordin ***n*** par pentru filtrele **FTS şi FOB**, datorită faptului că pentru ordin impar răspunsul în frecvență la frecvența Nyquist ($F_s/2$) este 0.

  `b=fir1(n,wn,window)` utilizează fereastra specificată[1] în vectorul coloană al ferestrei corespunzătoare.Vectorul coloană trebuie să fie de lungime *n+1*. Dacă nu este specificată nici o fereastră, atunci implicit **`fir1`** utilizează fereastra Hamming.

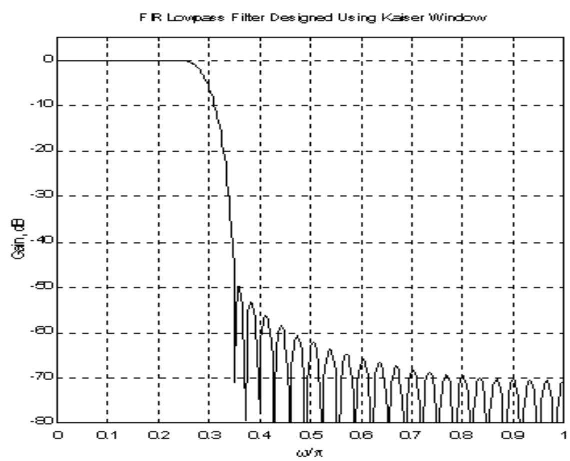
  `b=fir1(n, wn,'type',window)` acceptă drept parametri atât `'type'` cât şi `'window'`.

Exemplu 1. Să se proiecteze un filtru TJ FIR de lungime 61, cu frecvența de tăiere (normalizată la 1 pentru la $F_S/2$) de 0,3, utilizând fereastra Kaiser (cu $\beta = 4{,}533514$) şi să se reprezinte modulul răspunsului în frecvență.

---

[1] **boxcar**- pentru fereastra rectangulara; **triang**- pentru fereastra triunghiulara; **blackman**- pentru fereastra Blackman; **bartlett**- pentru fereastra Bartlett; **hamming**- pentru fereastra Hamming; **hanning** pentru fereastra Hanning; **kaiser**- pentru fereastra Kaiser

```
%Program P7_1
%Proiectarea unui filtru TJ FIR prin metoda ferestrelor
%Length = 61, Beta = 4.533514
format long
clf;
beta=4.533514;
kw=kaiser(61,beta);
b=fir1(60,0.3,kw);
[h,omega]=freqz(b,1,512);
mag=20*log10(abs(h));
plot(omega/pi,mag); axis([0 1 -80 5]);grid
xlabel('\omega/\pi');ylabel('Cistig, dB');
title('Proiectarea unui filtru TJ, FIR, cu fereastra Kaiser');
```



- **`fir2`** reprezintă o combinție dintre metoda ferestrelor şi cea de eşantionare în frecvență, fereastra aleasă implicit fiind fereastra Hamming.

  `b=fir2(n,f,m)` returnează un vector linie *b* conținând *n+1* coeficienți ai unui filtru FIR de ordinul *n*. Caracteristica amplitudine-frecvență a filtrului este cea dată de vectorii `f` şi `m`*:*

  \- `f` este un vector ce conține eşantioane ale răspunsului în frecvență din domeniul 0 la 1, unde 1 corespunde la $F_S/2$. Primul punct a lui *f* trebuie să fie 0 şi ultimul 1. Punctele trebuie să fie în ordine crescătoare.

  \- `m` este un vector ce conține amplitudinile dorite la frecvențele specificate în *f.*

  \- `f` şi `m` trebuie să aibă aceeaşi lungime. *(vezi* `help fir2`*)*

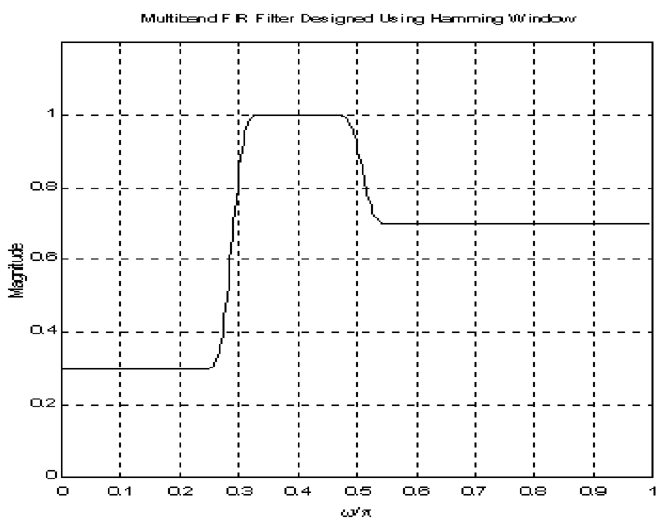
  Coeficienții din `b` sunt ordonați în ordine descrescătoare a puterilor lui *z.*

  `b=fir2(n,f,m,window)` utilizează fereastra specificată în vectorul coloană al ferestrei corespunzătoare. Vectorul coloană trebuie să fie de lungime *n+1*. Dacă nu este specificată nici o fereastră, atunci implicit **`fir2`** utilizează fereastra Hamming.

  `b=fir2(n,f,m,npt,window)` sau **`b=fir2(n,f,m,npt)`** specifică numărul de puncte, `npt`, ale gridului în care **`fir2`** interpolează răspunsul în frecvență, cu sau fără specificația de fereastră.

Exemplul 2. Să se proiecteze un filtru FIR, având ordinul 100, prin metoda eşantionării în frecvență cu ajutorul comenzii **`fir2`**. Caracteristica amplitudine-frecvență a filtrului este cea dată de vectorii *`fpts`* şi `mval`.

```
%Program P7_2
%Proiectarea unui filtru FIR prin metoda esantionarii in frecventa
clf;
fpts=[0 0.28 0.3 0.5 0.52 1];
mval=[0.3 0.3 1.0 1.0 0.7 0.7];
b=fir2(100,fpts,mval);
[h,omega]=freqz(b,1,512);
plot(omega/pi,abs(h)); grid;
axis([0 1 0 1.2]);
xlabel('\omega/\pi');ylabel('Amplitudine');
title('Proiectarea filtrului FIR prin metoda esantionarii in frec');
```



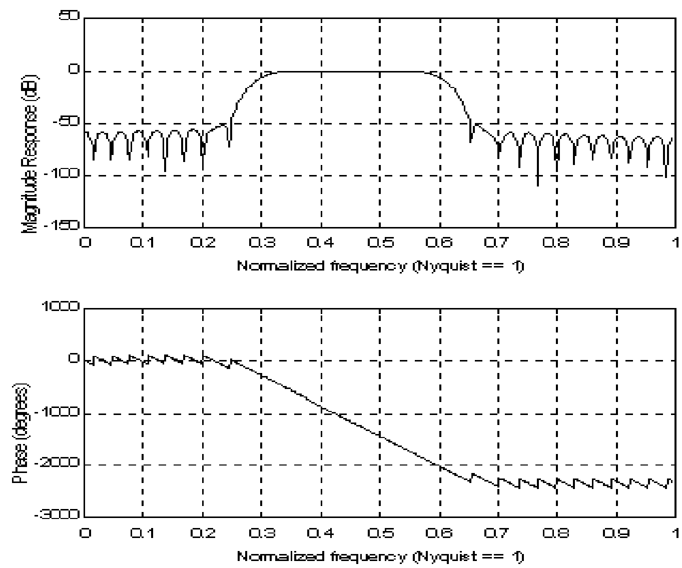
- **`filter`** filtrează secvențele cu un filtru FIR sau un filtru IIR
  `y=filter(b,a,x)` filtrează datele din vectorul *x* cu filtrul descris prin coeficienții din vectorii *b* şi *a* şi obține datele filtrate în vectorul *y*. **`filter`** poate avea date de intrare atât reale cât şi complexe.

Exemplul 3 Să se proiecteze un filtru TB, FIR, prin metoda ferestrelor, utilizând fereastra Hamming, având ordinul 64, cu banda de trecere 0.3<w<0.6. Să se reprezinte răspunsul filtrului în frecvență al filtrului şi răspunsul la impuls în 100 de puncte.

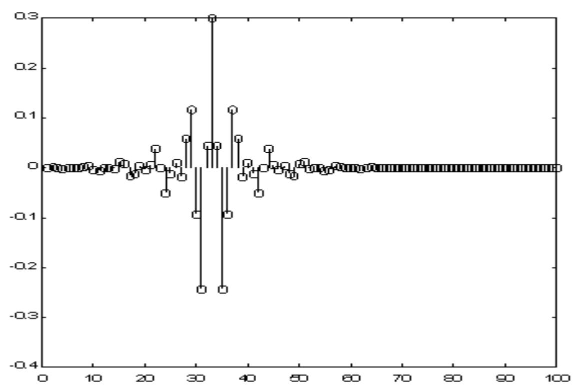
```
%Program P7_3
%priectarea unui filtru TB, FIR, prin metoda ferestrelor
clf;
b=fir1(64,[0.3 0.6]);
figure(1);
freqz(b,1);
imp=[1 zeros(1,99)];
h=filter(b,1,imp);
figure(2);
stem(h);
```

```
title('Raspunsul la impuls');xlabel('n');ylabel('Amplitudine');
```

Se obține următorul răspuns în frecvență



şi răspunsul la impuls:



B. Pentru proiectarea filtrelor FIR cu ajutorul metodei optimale se folosesc următoarele funcții:

- **`fircls1`** are la bază proiectarea filtrelor FIR cu fază liniară tip FTJ şi FTS, având la bază metoda celor mai mici pătrate

  `b=fircls1(n,wo,dp,ds)` generează un filtru Trece Jos, FIR cu fază liniară, de lungime `n+1`, *cu* frecvența de tăiere normalizată `wo` în domeniul $\overline{0,1}$ (1 corespunzând la $F_s/2$), cu `dp` deviația maximă față de 1 din banda de trecere şi cu `ds` deviația maximă față de 0 din banda de oprire.

  `b=fircls1(n,wo,dp,ds,'high')` generează un filtru Trece Sus (ordinul *n* trebuie să fie par).

  `b=fircls1(n,wo,dp,ds,'design flag')` permite să se monitorizeze proiectarea filtrului, unde `'design filter'` poate fi:

- `'trace'` pentru o afişare a unui tabel utilizat în proiectare
- `'plots'` pentru trasarea grafică amplitudinii, întârzierii de grup a zerourilor şi polilor
- `'both'` pentru afişarea atât tip text cât şi grafică

- **`firls`** are la bază proiectarea filtrelor FIR cu fază liniară prin metoda celor mai mici pătrate

  `b=firls(n,f,a)` returnează un vector *b* conținând *n+1* coeficienți ai unui filtru FIR de ordinul *n*, a cărui caracteristică de amplitudine aproximează pe cea dată de vectorii *f* şi *a*.

  - `f` este un vector de frecvențe de la 0 pînă la 1, unde 1 corespunde la $F_S/2$. Punctele trebuie să fie în ordine crescătoare.
  - `a` este un vector ce conține amplitudinile dorite la frecvențele specificate în `f`. Amplitudinea dorită corespunzătoare frecvențelor cuprinse între perechile de puncte (`f(k),f(k+1)`), cu *k* impar este un segment de dreaptă ce leagă punctele (`f(k),a(k)`) şi (`f(k+1),a(k+1)`). Amplitudinea dorită corespunzătoare frecvențelor cuprinse între perechile de puncte (`f(k),f(k+1)`), cu *k* par este nespecificată. Spațiile între astfel de puncte sunt regiuni ce nu interesează (*don't care regions*).
  - `f` şi `a` trebuie să aibă aceeaşi lungime. Lungimea trebuie să fie un număr par.

  `b=firls(n,f,a,'ftype')` specifică tipul filtrului în **`'ftype'`** după cum urmează:

  - `'hilbert'` pentru filtre FIR cu fază liniară şi simetrie impară. Această clasă include transformatorul Hilbert, ce are amplitudinea egală cu 1 în întreaga bandă.
  - `'differentiator'` pentru filtru cu fază liniară şi simetrie impară, utilizând o tehnică specială de ponderare după cum urmează: pentru o bandă cu amplitudine nenulă, eroarea medie pătratică este ponderată cu un factor egal cu $(1/f)^2$, ceea ce face ca eroarea la frecvențe mici să fie mult mai mică decât la frecvențe ridicate; pentru filtrele FIR de tip diferențiator, pentru care amplitudinea este proporțională cu frecvența, aceste filtre minimizează eroarea medie pătratică relativă (integrala pătratului raportului erorii şi al amplitudinii dorite).

- **`remezord`** estimează ordinul unui filtru FIR prin metoda optimală, utilizând algoritmul Parks-McClellan.

  `[n,fo,ao,w]=remezord(f,a,dev,fs);` determină ordinul, capetele normalizate ale benzilor, amplitudinile corespunzătoare şi ponderile care satisfac specificațiile de intrare cuprinse în `f`, `a` şi `dev` ce vor fi utilizate cu comanda **`remez`**.

  - `f` este un vector ce reprezintă capetele benzilor (între 0 şi $F_2/2$)
  - `a` este un vector ce specifică amplitudinile dorite în benzile specificate de *f*. Lungimea lui *f* este de două ori lungimea lui `a` minus 2.
  - `dev` este un vector de aceeaşi lungime ca `a` şi specifică deviația maximă permisă a riplului între răspunsul real în frecvență şi cel dorit, pentru fiecare bandă.
  - **`fs`** este frecvența de eşantionare.

- **`remez`** proiectează un filtru FIR cu fază liniară utilizând metoda Parks-McClellan, ce are la bază algoritmul Remez. Filtrul proiectat este optimal în sensul că eroarea maximă între răspunsul în frecvență dorit şi răspunsul în frecvență obținut este minimizată. Uneori filtrele proiectate în acest mod se numesc *filtre de tip echiriplu*.

`b=remez(n,fo,ao)` returnează un vector linie `b` ce conține cei *n+1* coeficienți ai unui filtru FIR de ordin `n` a cărui caracteristică amplitudine-frecvență este conținută în vectorii `f` şi `a`*:*

- `fo` este un vector de perechi ale eşantioanelor în frecvență din domeniul 0 la 1, unde 1 corespunde la $F_S/2$. Punctele trebuie să fie în ordine crescătoare.
- `ao` este un vector ce conține amplitudinile dorite la frecvențele specificate în *f*. Amplitudinea dorită corespunzătoare frecvențelor cuprinse între perechile de puncte (`f(k),f(k+1)`), cu *k* impar este un segment de dreaptă ce leagă punctele (`f(k,a(k)`) şi (`f(k+1),a(k+1)`). Amplitudinea dorită corespunzătoare frecvențelor cuprinse între perechile de puncte (`f(k),f(k+1)`), cu *k* par este nespecificată. Spațiile între astfel de puncte sunt regiuni ce nu interesează (*don't care regions*).
- `fo` şi `ao` trebuie să aibă aceeaşi lungime. Lungimea trebuie să fie un număr par.

`b=remez(n,fo,ao,w)` utilizează vectorul **`w`** pentru a pondera forma în fiecare bandă. Lungimea lui **`w`** este ½ din cea a lui **`fo`** şi **`ao`**.

Se utilizează **`b=remez(n,fo,ao,wo)`** cu ordinul n, vectorul frecvență **`fo`** , răspunsul în amplitudine **`ao`** şi ponderile rezultate prin rularea comenzii:

`[n,fo,ao,w]=remezord (f,a,dev,fs).`

`b=remez(n,fo,ao,'type')` specifică tipul filtrului:

- `'hilbert'` pentru filtru cu fază liniară şi simetrie impară. Această clasă include transformatorul Hilbert, ce are amplitudinea egală cu 1 în întreaga bandă.
- `'differentiator'` pentru filtru cu fază liniară şi simetrie impară, utilizând o tehnică specială de ponderare. Pentru o bandă cu amplitudine nenulă, eroarea este ponderată cu un factor egal cu 1/f ceea ce face ca eroarea la frecvențe mici să fie mult mai mică decât la frecvențe ridicate. Pentru filtrele FIR de tip diferențiator, pentru care amplitudinea este proporțională cu frecvența, aceste filtre minimizează eroarea maximă relativă (maximul raportului dintre eroare şi amplitudinea corespunzătoare).

Exemplul 4. Să se determine ordinul unui filtru Trece Jos FIR cu fază liniară utilizând comanda remezord, iar apoi să se proiecteze prin metoda optimală, utilizând metoda Parks-McClellan şi să se reprezinte modulul răspunsului în frecvență al acestui filtru. Se ştie că frecvența de eşantionare este 8000 Hz, banda de trecere este până la 1500 Hz iar cea de oprire începe la 2000 Hz. Deviația maximă în banda de trecere este 0.01 iar în banda de oprire 0.001.

```
% Program P7_4
% Estimarea ordinului folosind remezord
f=[1500 2000];
a=[1 0];
dev=[0.01 0.001];
fs=8000;
[n,fo,ao,w] = remezord(f,a,dev,fs);
fprintf('Ordinul filtrului este:  %d \n',n);
```

```
% Proiectarea unui filtru FIR echiriplu cu functia remez
clf;
format long
b = remez(n,fo,ao,w);
%disp('Coeficientii filtrului FIR'); disp(b)
[H,w] = freqz(b,1,256);
mag = 20*log10(abs(H));
plot(w/pi,mag);axis([0 1 -80 5]); grid
xlabel('\omega/\pi'); ylabel('Cistig, dB');
title('Filtru FIR echiriplu cu faza liniara')
```

4. Proiectarea filtrelor FIR cu ajutorul instrumentelor interactive (SPTool)

Toolboxul de procesare a semnalelor din MATLAB include o interfață grafică, numită SPTool. Cu ajutorul acestui instrument se pot proiecta filtre. Componenta care permite acest lucru este **Filter Designer**. Pentru a deschide SPTool se tastează **sptool** la prompterul din MATLAB. Din fereastra care apare se selectează **New Design.** Se generează un filtru prestabilit într-o fereastă ca cea din figura 3.

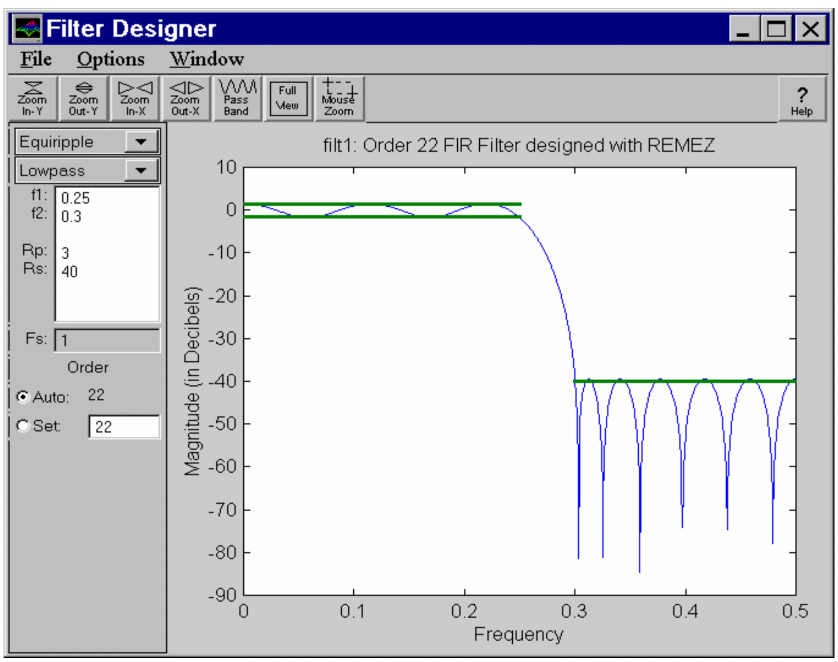


Figura 3. Interfata grafica pentru proiectare filtrelor FIR

Se pot alege doar trei opțiuni pentru proiectarea filtrelor FIR: echiriplu (ce are la bază funcția *remez),* cele mai mici pătrate (ce accesează funcția firls) şi fereastra Kaiser (ce accesează funcția fir1). Se pot selecta oricare din configurațiile standard: FTJ, FTS, FTB şi FOB.

Pentru a vizualiza răspunsul în frecvență al filtrului, răspunsul la impuls şi răspunsul la impuls treaptă se poate utiliza **Filter Viewer** (figura 4) prin selectarea opțiunii **View** din fereastra corespunzătoare pentru SPTool**.**

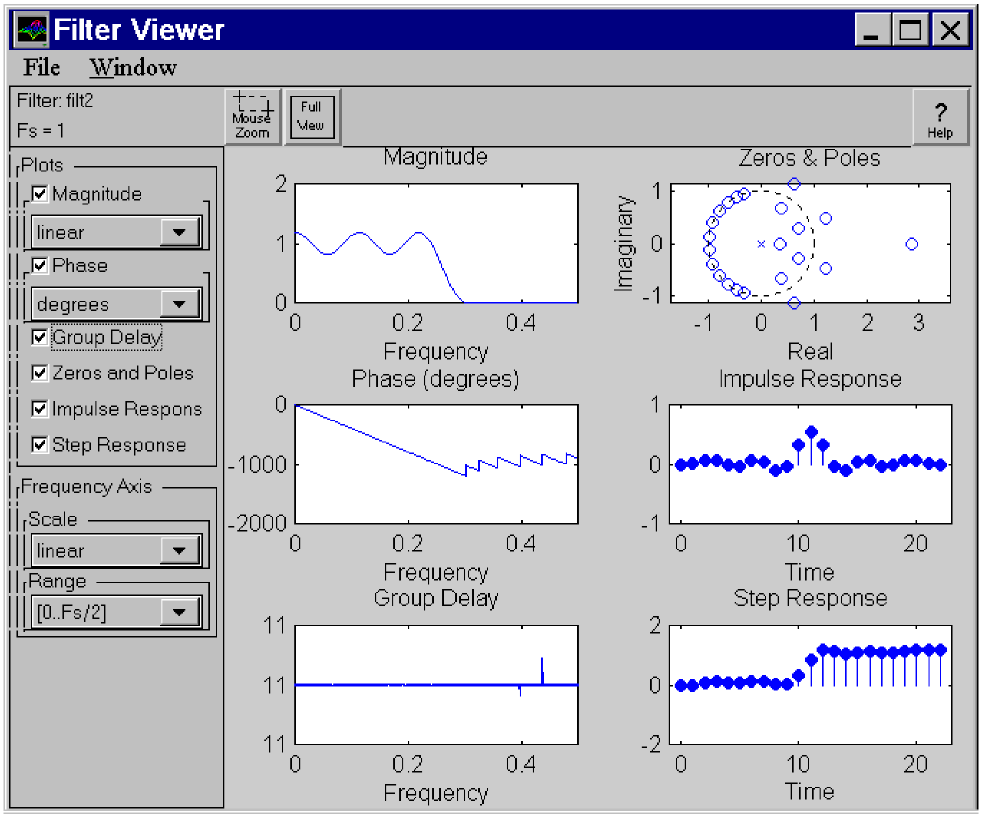


Figura 4. Vizualizarea performanțelor unui filtru FIR

Se poate filtra un semnal cu ajutorul unui filtru proiectat selectând un filtru în lista **Filters,** iar semnalul din lista **Signals** şi apoi selectând **Apply.**

5. Aplicații propuse

1. Să se reprezinte grafic ferestrele dreptunghiulară, triunghiulară, Hanning, Hamming, Blackman şi Kaiser (pentru diferite valori ale lui β) utilizând comenzile: *boxcar, bartlett, hanning, hamming, blackman* şi *kaiser*. Să se determine şi să se reprezinte modulul răspunsului în frecvență al acestora. Să se noteze valorile lobilor secundari. Să se compare răspunsurile în frecvență şi să se precizeze ce fereastră asigură cea mai îngustă bandă de tranziție. Trageți concluzii cu privire la efectul acestor ferestre în proiectarea filtrelor FIR.

2. Să se sintetizeze un filtru FIR, de tip FTB, de ordinul 25, prin metoda ferestrelor (fereastră dreptunghiulară, Bartlett, Blackman, Hamming, Hanning, Kaiser), având limitele benzii de trecere F_{p1}=12 kHz şi F_{p2}=16 kHz. Se consideră o frecvență de eşantionare de F_S=96 kHz.

Pentru fiecare tip de fereastră să se reprezinte:
- răspunsul în frecvență al filtrului;
- răspunsul la impuls;
- distribuția zerourilor.

Comentați forma răspunsului la impuls şi distribuția zerourilor sale.

3. Să se proiecteze un filtru FIR, de tip FTS, de ordinul 48, prin metoda eşantionării în frecvenţă, având frecvenţa limită a benzii de trecere F_p=10 kHz. Frecvenţa de eşantionare este F_S =30 kHz. Să se reprezinte răspunsul în frecvenţă al filtrului, precum şi localizarea zerourilor sale.

4. Să se proiecteze un filtru FTJ având ordin minim, cu frecvenţa de tăiere din banda de trecere de F_{p1}=500 Hz şi frecvenţa din banda de oprire de F_{s1}=600 Hz, având o frecvenţă de eşantionare F_S= 2000 Hz, o atenuare de cel puţin 40 dB în banda de oprire şi de cel mult 3 dB în banda de trecere.

5. Semnalul analogic $x(t) = \cos(2\pi F_1 t) + \cos(2\pi F_2 t)$ ($F_1 = 3kHz$ şi $F_2 = 3.2kHz$) se eşantionează cu frecvenţa $F_S = 15kHz$.

a) Să se determine analitic semnalul discret obţinut $x[n]$, să se genereze pentru $n = \overline{0:199}$ şi să se reprezinte în domeniul timp şi în domeniul frecvenţă; în domeniul frecvenţă se va reprezenta modulul Tranformatei Fourier Descrete a secvenţei $x[n]$.

b) Să se sintetizeze un filtru FIR care să rejecteze prima componentă din cele două existente în spectrul semnalului $x[n]$;

c) Să se filtreze semnalul $x[n]$ prin filtrul obţinut şi să se reprezinte semnalul din ieşirea filtrului în domeniul timp şi în domeniul frecvenţă.

6. Să se poiecteze un filtru FIR, având aceleaşi cerinţe ca cele specificate la punctul **4**, utilizând interfaţa grafică **SPTool.**